Phys - 50 Дата: 26 декабря 1995

Меморандум КМД-2

Автор : Б.И.Хазин
Организация : Институт ядерной физики им. Будкера, лаб. 2-0
Тема : Эксперимент по измерению формфактора пиона. Состояние на 7.08.1995

---

1 Информация о наборе экспериментальных данных

К настоящему времени, информация в эксперименте по измерению формфактора пиона набрана в 46 энергетических точках, не считая данных в районе ϕ мезона, и обработана в 25 точках.

Сканирование началось с энергии пучка 505 МэВ и велось в сторону понижения энергии с шагом 5 МэВ. Для того, чтобы систематическая ошибка интеграла, определяющего величину адронной поляризации вакуума, не превышала 0.3%, энергия пучков должна быть известна с точностью не хуже 10^{-4}, что обеспечено использованием метода резонансной деполяризации.

В процессе сканирования был введен в строй Третичный триггер детектора [1] и, начиная с точки 405 МэВ, данные набирались с его использованием. Для контроля, в точке 405 МэВ информация набиралась как с использованием в качестве аргумента заряженного триггера сигнала с линеек калориметра CsI, так и с использованием Третичного триггера. Отметим, что, для записи события на МЛ, положительное решение Нейтрального триггера не требовало подтверждения положительным решением Третичного триггера.

В Таблице 1 указано включение аргументов триггера при записи различных серий заходов. При этом использованы следующие обозначения: TF - сигнал положительного решения трекового процессора, CsI - сигнал о превышении установленного порога энерговыделения в линейке CsI, NT - сигнал положительного решения нейтрального триггера, 3L - сигнал срабатывания любой проволочки в третьем слое DC, L3 - положительное решение третичного триггера. Знаком $*$ разделены аргументы триггера включенные в срабатывание по схеме И, а знаком $+$ по схеме ИЛИ.

Таблица 1: Характеристики триггера, используемого при записи различных серий заходов.

Номера заходов	Триггер
3017 – 3150	TF∗CsI+NT
3152 – 3163	TF∗3L∗L3+NT
3164 – 3165	TF∗CsI+NT
4107 – 4115	TF∗CsI+NT
4115 – ...	TF∗3L∗L3+NT

Бухгалтерия эксперимента приведена в Таблице 2. Светимость определена после обработки заходов процедурами CMD2OFF (версия 02.31/00) и CMD2PI [2] (версия 1.02/01).

Таблица 2: Общая информация о заходах.

Дата набора	Энергия пучка, МэВ	Номера заходов	Число событий на первичной ленте	Интеграл светимости, $нбн^{-1}$
26-27/01/94	505.136	3017,22,32,25	869673	20.20 ± 0.09
27-29/01/94	500.305	3027,33,34,35	529943	26.57 ± 0.12
30-31/01/94	495.470	3036,37,38,39	696399	38.02 ± 0.13
31/01/94	490.598	3040	389639	19.77 ± 0.10
01-03/02/94	485.726	3041,43,49,52, 53,55,58	1352946	32.70 ± 0.13
03-04/02/94	480.758	3061,62,63,66, 67	601795	17.77 ± 0.12
05/02/94	475.921	3068,69,70,71, 72,73,74	670153	20.01 ± 0.12
06/02/94	471.097	3075,76,77,78	454597	15.75 ± 0.11
06-11/02/94	465.054	3079,80,81,88, 89	620606	16.40 ± 0.12
11/02/94	459.778	3090,92	466435	12.53 ± 0.09
12/02/94	455.008	3094,95,96,97, 98,99,3100	561749	13.44 ± 0.11
13/02/94	450.019	3102,03	470116	9.78 ± 0.10
13/02/94	444.860	3107,08	362382	11.60 ± 0.11
15/02/94	439.921	3109,10,11	190164	4.04 ± 0.07
15-16/02/94	434.751	3112,13	516868	8.39 ± 0.10
16/02/94	429.798	3115,17,20	153991	2.90 ± 0.06
17/02/94	424.620	3122	323357	4.90 ± 0.08
17-18/02/94	419.550	3123,24,28,34	339876	5.31 ± 0.08
22/02/94	414.986	3143,48	255027	3.48 ± 0.07
22-23/02/94	410.012	3149,50	432498	6.02 ± 0.10
24-26/02/94	404.992	3153,56,57,59, 61,62,63	777399	10.76 ± 0.12
26-27/02/94	404.992	3164,65	259107	3.58 ± 0.06
29/11-2/12/94	405.002	4107,09,10,11, 12,13,14,15	1725690	8.38 ± 0.10
03-05/12/94	405.005	4118,19,20,22, 26,27,28,29, 31,33	1896280	10.22 ± 0.13
05-10/12/94	400.009	4136,37,42,44, 46,48,49,51	1341774	10.75 ± 0.12
10-12/12/94	397.068	4152,53,55,57, 59,60	759271	9.23 ± 0.11
14-16/12/94	395.048	4162,65,67,69, 72,74,75	1487012	9.41 ± 0.10
316-17/12/94	393.018	4176,77,78,79, 80,83	1145926	5.86 ± 0.09

2 Отбор коллинеарных событий.

Для отбора коллинеарных событий использовались следующие критерии:

1. В событии есть только два трека.

2. Число точек на каждом треке в плоскости XY не меньше 6.

3. Суммарный заряд двух частиц равен нулю.

4. Расстояние от вершины события до оси пучков в плоскости XY (R_{vrtx}) меньше 0.15 см (См. Рис.1).

5. Z – координата вершины удовлетворяет условию $abs(Z) < 10$ см (См. Рис.2).

6. Средний импульс пары частиц в событии меньше 600 МэВ/с и больше 200 МэВ/с. (Конечно, при каждой данной энергии пучка, импульсы пионов, мюонов и электронов лежат в гораздо более узких рамках, но, чтобы не возиться с изменениями условий отбора при изменении энергии пучка, наложены требования, удовлетворяющие всей набранной статистике).

7. Энергия связанных с треками кластеров в калориметре CsI не превышает 550 МэВ. (Связанные с треками кластеры брались из банка глобальной реконструкции GREC).

8. Угол вылета относительно оси Z первого трека в событии (независимо от его знака) лежит в пределах от 1.1 до 2.0416 радиан.
   Треки с таким углом вылета пересекают все слои дрейфовой камеры - смещение вдоль оси Z на внешнем радиусе ДК составляет 15 см и, с учетом длины области взаимодействия (Рис. 2), абсолютная величина Z-координаты не превышает 20 см.

   Следует отметить, что условие 8 на угол вылета трека относительно оси Z устанавливается только для ОДНОГО трека в событии. Смысл его можно пояснить следующим образом: вблизи предельного угла θ, из-за конечного углового разрешения, примерно половина треков, вылетающих под углом немного меньшим θ, выпадает из области регистрации, а половина оказывается внутри нее. Тогда, если бы критерий на угол вылета был установлен на оба трека, в полезный телесный угол попала бы только $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ часть всех событий, рожденных внутри области регистрации вблизи предельного угла. Те же рассуждения для частиц, вылетающих под углом немного большим θ показывают, что в телесный угол вернется лишь 1/4 их часть. Таким образом, область вблизи предельного угла будет обеднена событиями в два раза. Установка критерия на один трек убирает этот эффект. Поскольку знак заряда частицы, соответствующей первому треку, с равной вероятностью равен $+1$ и -1, убирается и возможная систематика, связанная со знаком.

9. Угол расколлинеарности треков в плоскости XY не превышает 0.15 радиан (См. Рис.3).

10. Угол расколлинеарности треков в плоскости содержащей ось пучков не превышает 0.25 радиан.(См. Рис.4).

11. Коды ошибок обоих треков равны нулю.
    Код ошибки трека вычитывается из банка TCTK. Код равен 0, если воостановление его радиуса кривизны трека и его угла вылета относительно оси пучков завершилось успешно. Код равен 1, если не восстановлен радиус кривизны и равен 10, если не восстановлен угол вылета.

12. $2 \cdot abs(P_1 - P_2)/(P_1 + P_2) < 2$.

Условие 12 введено для фильтрации событий с излучеием фотона одной из конечных частиц. Ныне установленные границы на этот параметр такой отбраковки не обеспечивают и связано это с тем, что дефекты используемого алгоритма реконструкции приводят к разности импульсов положительных и отрицательных частиц на уровне 4% от величины импульса. Учет реального положения изохрон в DC, реализованный П.А.Лукиным [3], обещает ликвидировать этот дефект и реально использовать условие 12, сделав его более жестким.

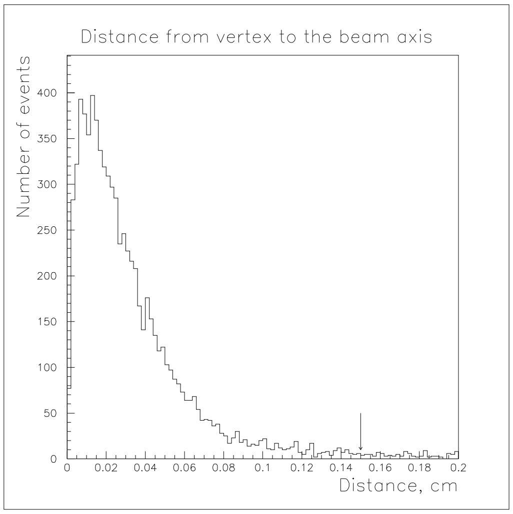

Рис. 1: Расстояние от вершины события до оси пучков.

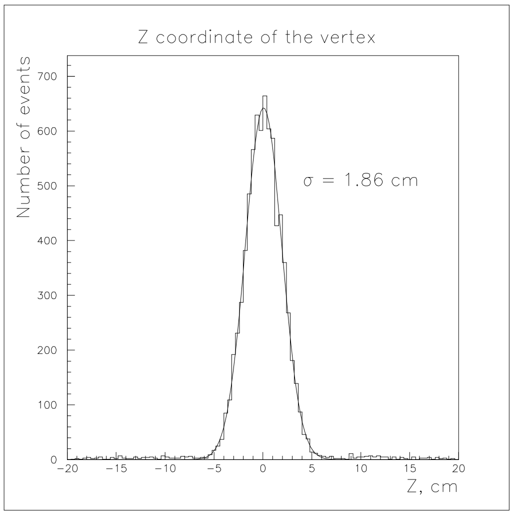

Рис. 2: Координата вершины события вдоль оси пучков (Z - координата).

3 Разделение событий.

Формфактора пиона определяется в соответствие с формулами 1, 2,3. Чтобы воспользоваться ими, необходимо определить количество событий с рождением пары пионов, мюонов и электронов среди отобранных коллинеарных событий. В настоящее время, для разделения событий на перечисленные классы, используются распределение Z – координаты вершины события, угловое распределение событий относительно оси пучков и двумерное распределение энерговыделений частиц события в калориметре . Экспериментальные распределения подгоняются методом функции максимального правдоподобия с использованием общих (глобальных) параметров оптимизации и локальных параметров, которые необходимы только для описания каждого отдельного распределения. Глобальные параметры должны позволять определение чисел событий разных типов и, в то же время, наиболее адекватно соответствовать задаче определения формфактора пиона.

3.1 Выбор глобальных параметров разделения событий.

Зарегистрированное число пионных событий определяется следующим соотношением:

$$N_\pi = L \cdot \sigma_\pi \cdot \epsilon_\pi \cdot (1+\delta_\pi) \cdot (1+\delta_{nucl}) \cdot (1+\delta_{decay}) \cdot |F_\pi|^2 , \tag{1}$$

где L - интеграл светимости, σ_π - борновское сечение процесса $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$, ϵ_π - эффективность регистрации $\pi^+\pi^-$ событий, δ_π - радиационная поправка к процессу $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$, δ_{nucl} - поправка на ядерное взаимодействик пионов, δ_{decay} - поправка на распад пионов на лету, $|F_\pi|^2$ - квадрат модуля формфактора пиона. Число зарегистрированных e^+e^- и $\mu^+\mu^-$ событий определяется как:

$$N_e + N_\mu = L \cdot (\sigma_e \cdot \epsilon_e \cdot (1+\delta_e) + \sigma_\mu \cdot \epsilon_\mu \cdot (1+\delta_\mu)) , \tag{2}$$

где все обозначения аналогичны формуле [1]. Комбинируя [1] и [2] получим:

$$|F_\pi|^2 = \frac{N_\pi}{N_e + N_\mu} \cdot \frac{\sigma_e \cdot \epsilon_e \cdot (1+\delta_e) + \sigma_\mu \cdot \epsilon_\mu \cdot (1+\delta_\mu)}{\sigma_\pi \cdot \epsilon_\pi \cdot (1+\delta_\pi) \cdot (1+\delta_{nucl}) \cdot (1+\delta_{decay})} . \tag{3}$$

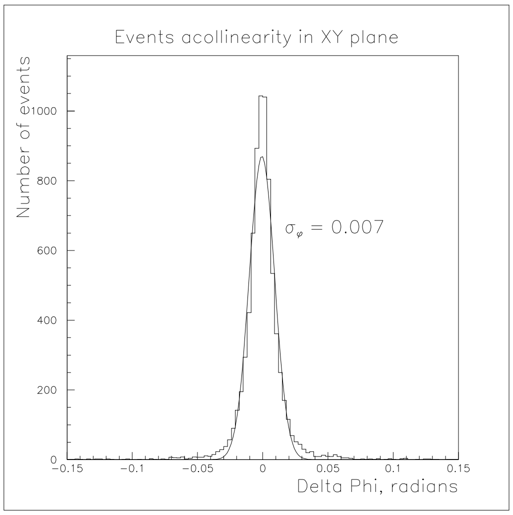

Рис. 3: Угол расколлинеарности событий в поперечной плоскости.

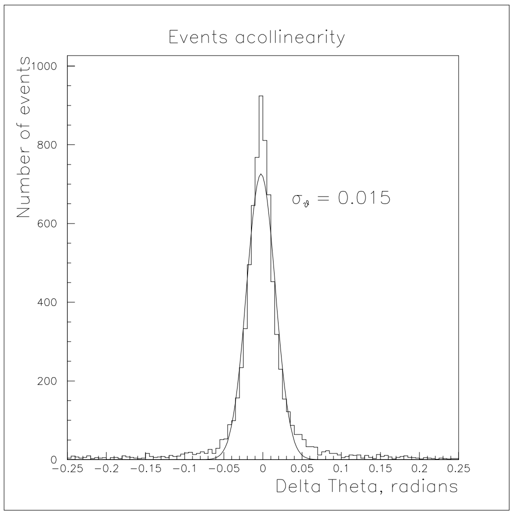

Рис. 4: Угол расколлинеарности событий в плоскости, содержащей ось пучков.

Таким образом, естественным параметром, который надо получить в процессе разделения событий, является отношение

$$R = \frac{N_\pi}{N_e + N_\mu}.$$

Кроме того, для описания экспериментальных распределений вводятся еще три параметра:

$$N_e, \quad R_\mu = N_\mu/N_e, \quad N_{background}, \quad \text{дальше обозначаемый как} \quad N_b.$$

Между тем, известно полное число событий, попавших в гистограммы $N = N_e + N_\pi + N_\mu + N_b$. Его можно не фиксировать и, тем самым, разрешить флуктуации полного числа частиц при данном интеграле светимости в пределах дозволенного законами статистики. Однако, проверка алгоритма на моделированных событиях показала, что в этом случае наблюдается систематический сдвиг при определении числа зарегистрированных пионов. Причина этого сдвига пока непонятна. В Таблице 3, для трех наборов моделированных событий, приведены числа событий электрон-позитронной аннигиляции в e^+e^-, $\pi^+\pi^-$, $\mu^+\mu^-$ и фона космических частиц, заложенных при моделировании и полученных в результате работы программы разделения в двух вариантах – без использования требования равенства суммы найденного числа событий числу событий в гистограммах и с его использованием.

Таблица 3: Сравнение результатов разделения моделированных событий с фиксацией и без фиксации полного числа событий в гистограммах.

	Заложено	Получено (Число событий не фиксировано)	Получено (Число событий фиксировано)
N_{ee}	1928	1925 ± 43.8	1939 ± 43.9
$N_{\mu\mu}$	182	181.4 ± 4.1	182.7 ± 4.1
$N_{\pi\pi}$	562	584.8 ± 27.6	550.6 ± 27.4
N_b	1	1.0 ± 4.7	1.0 ± 4.7
N_{ee}	1928	1921 ± 43.7	1931 ± 43.8
$N_{\mu\mu}$	182	181.1 ± 4.1	182.0 ± 4.1
$N_{\pi\pi}$	562	584.7 ± 27.4	558.8 ± 27.4
N_b	1	1.0 ± 4.7	1.0 ± 4.7
N_{ee}	4213	4202 ± 64.7	4228 ± 64.9
$N_{\mu\mu}$	396	396.0 ± 6.0	398.5 ± 6.0
$N_{\pi\pi}$	1226	1276 ± 41	1209 ± 40
N_b	1	1.0 ± 4.7	1.0 ± 4.7

При этом величина формфактора, определенная после разделения событий без фиксирования их полного числа, на 0.7 процента превышала заложенное значение.

3.2 Что такое корреляционная матрица и как записать для нее функцию максимального правдоподобия.

Опишем здесь то содержание, которое вкладывается в понятие 'корреляционная матрица' ?? в условиях нашей задачи по разделению событий.
Предполагается, что в каждом отобранном коллинеарном событии есть две частицы одного сорта, отличающиеся знаком заряда. Частицу космического фона тоже можно рассматривать как две частицы разного знака, вылетевшие из области места встречи пучков. Тогда вероятности некоторого энерговыделения в калориметре для частицы номер 1 и частицы номер 2 должны быть одинаковы. Частицы специально помечены номерами '1' и '2', а не их зарядами, чтобы не внести несимметрию в энерговыделениях.

Построим теперь двумерное распределение $E_1^{cluster}$ от $E_2^{cluster}$ и будем именовать его в дальнейшем 'корреляционной матрицей энерговыделений в калориметре CsI', или просто, 'корреляционной матрицей', поскольку другие корреляции пока не используются. Для определения числа событий того или иного сорта в этой матрице, мы должны найти математические ожидания в каждой клетке матрицы и сравнить их с экспериментальными значениями. Окончательный ответ соответствует минимуму функции максимального правдоподобия.

Для определения математических ожиданий есть два пути. Можно из разумных (!?) соображений или моделирования найти априорные вероятности попадания в данную клетку матрицы событий каждого класса, либо включить эти вероятности в число параметров оптимизации. Из обсуждавшейся выше симметрии первого и второго треков следует, что вероятность попадания в i - ую строку матрицы равна вероятности попадания в ее i - ый столбец.

Подгонка двумерного распределения с использованием указанной выше симметрии вероятностей энерговыделения частиц в калориметре (или, возможно, какого либо иного, коррелированного в указанном смысле, физического параметра) в качестве параметра подгонки, и будет дальше называться ' методом корреляционной матрицы'.

Пусть μ_{ij} – математическое ожидание числа событий в i, j клетке двумерного распределения. Тогда вероятность найти в ней n_{ij} – событий, реально полученных в эксперименте, дается распределением Пуассона:

$$P(n_{ij}) = \frac{\mu_{ij}^{n_{ij}} \cdot e^{-\mu_{ij}}}{n_{ij}!}.$$

Полная вероятность иметь данное двумерное экспериментальное распределение равна:

$$\Phi = \prod_{i,j} P(n_{ij}),$$

и функция максимального правдоподобия:

$$\mathcal{L} = -\ln(\Phi) = -\sum_{i,j} \ln \frac{\mu_{ij}^{n_{ij}} \cdot e^{-\mu_{ij}}}{n_{ij}!} = -\sum_{ij} \left(n_{ij} \cdot \ln(\mu_{ij}) - \mu_{ij} - \sum_{1}^{n_{ij}} \ln k \right).$$

Но $\sum \mu_{ij} = N$ — полному ожидаемому числу событий в распределении (вообще говоря, не равному реально измеренному, что отражает возможность флуктуации числа зарегистрированных событий с $\sigma = \sqrt{N}$), поэтому, окончательно:

$$\mathcal{L} = -\sum_{ij} \left(n_{ij} \cdot \ln(\mu_{ij}) - \sum_{1}^{n_{ij}} \ln k \right) + N. \tag{4}$$

Займемся теперь определением математических ожиданий μ_{ij}. Пусть вероятности попадания в i – й столбец (или i – ую строку) двумерного распределния для электронов, пионов, мюонов и космических частиц равны e_i, p_i, m_i и b_i соответственно.

С помощью этих вероятностей:

$$\mu_{ij} = N_e \cdot e_i \cdot e_j + N_\pi \cdot p_i \cdot p_j + N_\mu \cdot m_i \cdot m_j + N_b \cdot b_i \cdot b_j,$$

или, через глобальные параметры:

$$\mu_{ij} = N_e \cdot (e_i \cdot e_j + R \cdot (R + R_\mu) \cdot p_i \cdot p_j + R_\mu \cdot m_i \cdot m_j) + N_b \cdot b_i \cdot b_j.$$

Параметры e_i и p_i оптимизируются вместе с глобальными и локальными параметрами других распределений.

Очевидно, что величины e_i и p_i должны одновременно удовлетворять условиям:

$$0 < p_i < 1, \quad 0 < e_i < 1 \quad и$$

$$\sum_i p_i = 1, \quad \sum_i e_i = 1.$$

Для одновременного выполнения этих условий был использован прием, описанный в Приложении 1.

Как уже отмечалось в пункте 3.1, сегодня кажется, что фиксирование полного числа событий обеспечивает лучшую точность определения формфактора.

В нынешней версии CMD2PI фиксирование производится просто – свободными глобальными параметрами остаются только N_b и R, а число электронов определяется как $N_e = N - N_\pi - N_\mu - N_b$, причем, как нетрудно видеть,

$$N_\pi = \frac{R}{1+R}(N - N_b); \quad N_\mu = \frac{R_\mu}{1+R_\mu}\frac{N - N_b}{1+R}; \quad N_e = \frac{N - N_b}{(1+R)(1+R_\mu)}.$$

Вообще говоря, такой способ фиксирования полного числа частиц не вполне ‘чист’ – можно представить, что в процессе оптимизации N_b превысит N и величины N_π, N_μ, N_e окажутся отрицательными. Однако, как мы увидим, величина N_b хорошо определяется из распределения событий по Z–координате вершины и на практике неприятностей не происходит.

С использованием этих глобальных параметров, математическое ожидание μ_{ij} записывается как:

$$\mu_{ij} = \frac{N - N_b}{(1+R)(1+R_\mu)} e_i e_j + \frac{R_\mu}{1+R_\mu}\frac{N-N_b}{1+R} m_i m_j + \frac{R}{1+R}(N-N_b)p_i p_j + N_b b_i b_j .$$

Вероятности p_i и e_i являются локальными оптимизируемыми параметрами двумерного распределения $E_1^{cluster}$ от $E_2^{cluster}$, а вероятности m_i и b_i определяются в соответствие с [4].

3.2.1 Определение величин m_i и b_i .

Для определения m_i и b_i были отобраны коллинеарные события в соответствие с условиями, описанными в пункте 2. со следующими изменениями:

- Для отбора космических частиц, вместо условия 4 требовалось, чтобы расстояние от вершины события до оси пучков в плоскости XY было больше, чем 0.5 см.
- Для отбора мюонов требовалось, чтобы в пучковом событии либо оба трека вызвали срабатывание внутренней мюонной системы, либо хотя бы один из них был зарегистрирован как внутренней так и внешней мюонной системой.

Было обработано две энергетических точки – 510 МэВ, состоящей из заходов 4042, 4043, 4044, 4046, 4048, 4049, 4050, 4053, 4055, 4056, 4059, 4060, 4061, 4062, 4064, 4066, 4068 и 405 МэВ из двух групп заходов: 3153, 3156, 3157, 3159, 3161, 3162, 3163, 3164, 3165 и 4107, 4108, 4109, 4110, 4111, 4112, 4113, 4114, 4115, 4118, 4119, 4120, 4122, 4126,4127, 4128, 4129, 4131, 4133, 4134.

Как показано в [4], энерговыделение в калориметре не зависит от импульса космической частицы для импульсов больших, примерно, 200 МэВ/с и составляет 100 МэВ (если для минимально ионизирующих частиц взять плотность потерь 2 МэВ/г, то, при глубине кристаллов CsI 15 см и плотности 4.86 $г/см^3$, следует ожидать потерь $15 \cdot 4.86 \cdot 2 = 146$ МэВ). В соответствие с этим обстоятельством и был выбран нижний предел условия 6 в пункте 2.

Полученные распределения энерговыделений в зависимости от импульса частицы подгонялись суммой двух гауссовых распределений. Согласие подгонки с экспериментальным распределением очень хорошее. Окончательно, для распределения фона космических частиц используется выражение:

$$b(E) = exp\left(-\frac{(E-87.45)^2}{2\cdot 11.14^2}\right) + \frac{83.23}{697.7}\cdot exp\left(-\frac{(E-113.4)^2)}{2\cdot 23.31^2}\right).$$

Аналогично аппроксимируется распределение мюонов :

$$m(E) = exp\left(-\frac{(E-83.86)^2}{2\cdot 8.453^2}\right) + \frac{54.67}{101.0}\cdot exp\left(-\frac{(E-90.89)^2)}{2\cdot 16.0^2}\right).$$

3.3 Использование распределения событий по Z – координате вершины.

Продольный размер области взаимодействия пучков в месте встречи характеризуется величиной $\sigma_{interaction\ length} = 1.7 - 2$ см. Типичный пример такого распределения представлен на Рис.2. Из рисунка видно, что существует подложка, определяемая, главным образом, фоном космических частиц. Аналогичное распределение для событий, отобранных в соответствие с критериями пункта 2, но с заменой условия 4 требованием $R_{vrtx} > 0.15 см$, представлено на Рис.5. Видно, что распределение фоновых событий достаточно хорошо аппроксимируется константой.

В соответствие с этим, распределение событий по Z – координате вершины аппроксимируется суммой гауссового распределения и постоянной подложки. Локальными параметрами этой части функции максимального правдоподобия являются положение максимума и ширина гауссового распределения, характеризующие место втречи пучков.

3.4 Использование распределения событий по углу вылета относительно оси пучков.

Разные угловые распределения продуктов реакций $e^+e^- \to e^+e^-$, $\pi^+\pi^-$, $\mu^+\mu^-$ и частиц космического фона позволяют использовать эту информацию для их разделения.

Для определения ожидаемого числа частиц в канале гистограммы углового распределения, в интервале шага гистограммы сворачивались с гауссовым распределением с сигмой равной угловому разрешению следующие выражения:
для процесса $e^+e^- \to e^+e^-$:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \left(\frac{3+\cos^2\theta}{1-\cos\theta}\right)^2 \cdot \sin\theta + \left(\frac{3+\cos^2\theta}{1+\cos\theta}\right)^2 \cdot \sin\theta,$$

для процесса $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \sin^3\theta,$$

для процесса $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \left(1+\cos^2\theta + \left(\frac{105.7}{E_{beam}}\right)^2 \cdot \sin^2\theta\right) \cdot \sin\theta,$$

для частиц космического фона:

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \sin^4\theta.$$

Последнее распределение выглядит довольно странно, но $\sin^4\theta$, как видно из Рис.6 достаточно хорошо описывает угловое распределение коллинеарных частиц, для которых вершина взаимодействия отстоит больше чем на 0.15 см от оси пучков.

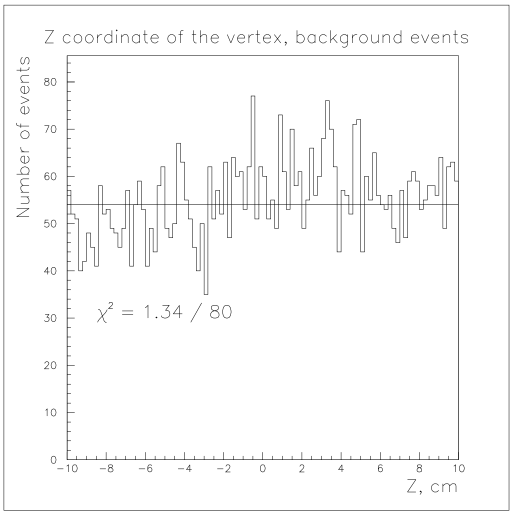

Рис. 5: Z-координата вершины космических событий.

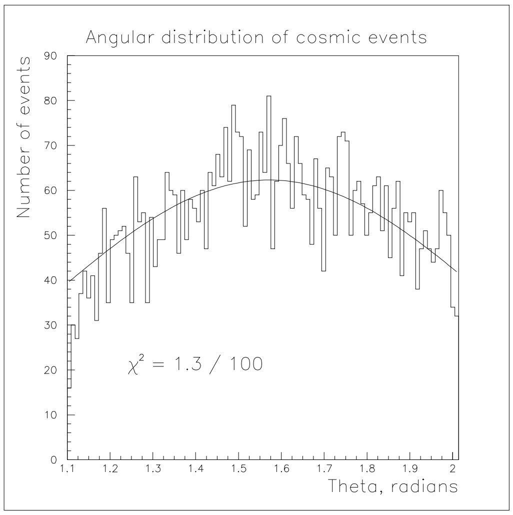

Рис. 6: Угловое распределение космических событий.

Для подгонки гистограммы углового распределения, дополнительных локальных параметров не используется.

3.5 Определение ошибок глобальных параметров.

Стандартный способ применения метода функции максимального правдоподобия $\mathcal{L}$ подразумевает ее запись в многомерном пространстве используемых физических параметров с последующей минимизацией. При этом ошибки всех параметров определяются тем, насколько надо отступить от их значения в минимуме, чтобы величина $\mathcal{L}$ увеличилась на 0.5 и делает все это хорошо известная программа MINUIT [5] .

Такая процедура требует, во-первых, очень аккуратного – с учетом всех корреляций – определения вида функции $\mathcal{L}$ и, во-вторых, поскольку работа будет вестись в многомерном пространстве, относительно большого процессорного времени.

Путь, реализованный в CMD2PI, состоит в минимизации нескольких (по числу используемых экспериментальных распределений) функций максимального правдоподобия одновременно. Это упрощает задачу конструирования функции $\mathcal{L}$ и степенным образом – показатель степени равен числу используемых экспериментальных распределений – уменьшает количество необходимых для минимизации операций.

Платой является менее автоматизированная процедура вычисления ошибок параметров. Правила, по которым они вычисляются, описаны в книгах по теории ошибок. Наиболее удобным введением в эту науку, по-видимому, остается небольшая лекция [6].

В соответствие с [6], для нахождения ошибок параметров необходимо извлечь корни из диагональных элементов обратной матрицы вторых производных функции максимального правдоподобия по оптимизируемым параметрам. Получаемая при этом ошибка учитывает все существующие корреляции между параметрами.

В случае, когда число событий в экспериментальных распределениях фиксируется, функция максимального правдоподобия записывается в виде:

$$\mathcal{L} = -\sum \ln\left(\frac{N-N_b}{1+R}\left(\frac{f_e + R_\mu \cdot f_\mu}{1+R_\mu} + R\cdot f_\pi\right) + N_b \cdot f_b\right) + N, \qquad (5)$$

где $f_{e,\pi,\mu,b}$ – вероятность данному событию попасть в определенную ячейку многомерного пространства физических параметров, используемых для разделения. Например, $f_e = e_i e_j z_k^e \theta_l^e$ – вероятность электронному событию попасть в i,j - клетку двумерного распределения энерговыделений, находясь в k-ом канале распределения по Z–координате вершины и l-ом канале распределения по углу вылета. Полная вероятность записана как произведение отдельных вероятностей – тем самым заложено, что корреляций между распределениями нет. Напомню еще раз, что это сделано только для оценки ошибок, но не для определения самих значений искомых параметров.

4 Поправки.

Для определения светимости, формфактора, других физических параметров, в процессе обработки необходимо учесть ряд поправок. В их число входят радиационные поправки, поправки на распад пионов на лету, на ядерное взаимодействие пионов, на эффективности регистрации и реконструкции.

4.1 Радиационные поправки.

Любой процесс электрон-позитронной аннигиляции в регистрируемые конечные частицы ‘одевается’ излучением виртуальных и реальных фотонов и поляризацией вакуума. Для достижения точности в доли процента необходимо учитывать и обмен Z - бозоном. Некоторые технические детали принятого подхода к вычислению радиационных поправок можно найти в работе [7].

При учете радиационных поправок в нашем эксперименте, надо иметь ввиду некоторые нестандартные обстоятельства, на которые было обращено внимание Г.Н.Шестаковым в сообщении [8].

Смысл этих замечаний состоит в следующем. Сечение рождения пары пионов, как и любого другого адронного конечного состояния, может быть использовано для изучения динамики этого процесса (резонансная структура, интерференция с другими резонансами, неупругие взаимодействия) и для вычисления вклада адронной поляризации вакуума в $g-2$ мюона. Радиационные поправки в этих случаях должны вычисляться разным образом.

При изучении вопросов динамики, интерес представляет резонанс, полностью одетый сильными, электромагнитными и прочими взаимодействиями. Это означает, что при вычислении радпоправок надо исключить вклады, связанные с адронной и лептонной поляризациями вакуума. 'Радпоправками' являются только электродинамические вклады, связанные с входящими частицами и вершиной аннигиляции. Полученные после обработки параметры – ширина, масса, лептонная ширина и т.д. – будут характеризовать реальный, одетый всеми взаимодействиями, резонанс. Именно такой подход дает возможность использовать эти параметры при анализе других физических процессов с участием данного резонанса.

В случае, когда данные по сечению рождения адронов используются для вычисления вклада адронной поляризации вакуума, например, в $g-2$ мюона, ситуация меняется. Входящая под знак интеграла величина R определяется как

$$R = \frac{\sigma_h^{(0)}}{\sigma_{\mu\mu}^{(0)}}, \tag{6}$$

где $\sigma_{\mu\mu}^{(0)} = 4\pi\alpha^2/3s$ - борновское сечение рождения пары мюонов, а $\sigma_h^{(0)}$ определяется 'голыми' сильными взаимодействиями в конечном сооостоянии. Тем самым, вклады адронной и лептонной поляризаций вакуума должны быть включены в радиационные поправки адронных сечений.

Это обстоятельство заставляет с осторожностью использовать данные других групп - поляризация вакуума часто включалась в сам резонанс, а не в радиационную поправку. Кроме того, не вполне ясно, как сохранить подход интегрирования по подогнанной кривой хода адронного сечения, а не прямо по экспериментальным точкам – теоретические модели, с помощью которых производится подгонка, существуют только для 'одетых' резонансов.

Один из приемлемых вариантов последовательного вычисления вклада адронной поляризации заключается в том, чтобы после подгонки формфактора резонансными кривыми, вычислить поляризационный интеграл, и, при вычислении вклада в $g-2$, интегрировать R с использованием подогнанной кривой, но с добавлением функции, убирающей поляризацию вакуума из экспериментальных сечений.

Может быть следует воспользоваться сделанным в работе [8] утверждением, что формула [6] эквивалентна выражению

$$R = \frac{\sigma_h^{(exp)}}{\sigma_{\mu\mu}^{(exp)}}, \tag{7}$$

где $\sigma_h^{(exp)}$ и $\sigma_{\mu\mu}^{(exp)}$ 'одетые' сечения? Мы не сможем с необходимой точностью измерить сечение $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$, но можем 'одеть' радпоправками, соответствующими нашей постановке эксперимента, борновское сечение рождения пары мюонов.

4.2 Поправки на распад пионов на лету и на ядерное взаимодействие.

Время жизни заряженного пиона равно $c\tau = 7.804$ м и в об'еме дрейфовой камеры, диаметр которой равен 60 см, распадается от 2 до 8 процентов пионов при уменьшении энергии пучка от 500 до 200 МэВ. Часть событий с распадами, наряду с событиями, в которых поизошло ядерное взаимодействие пионов внутри DC, перестает удовлетворять критериям отбора. Для определения соответствующих поправок было намоделировано по 4000 событий рождения пары пионов с энергиями 500, 400 и 300 МэВ в одном пучке. Результаты анализа приведены в Таблице 4.

Таблица 4: Моделироавние влияния распадов и ядерных взаимодействий пионов на вероятность потери событий. p_{decay}, p_{nucl} – вероятности распадов и ядерных взаимодействий, p_{lost} – вероятность связанных с ними потерь событий.

	Распады на лету		Ядерные взаимодействия	
Энергия, МэВ	p_{decay} %	p_{lost} %	p_{nucl} %	p_{lost} %
300	5.6 ± 0.4	3.35 ± 0.29	0.65 ± 0.13	0.65 ± 0.13
400	2.8 ± 0.3	0.55 ± 0.12	0.70 ± 0.14	0.63 ± 0.13
500	2.4 ± 0.2	0.45 ± 0.11	0.38 ± 0.10	0.38 ± 0.10

Для контроля моделирования и определения поправок в промежуточных точках по энергии, их вычисление было проделано вручную с использованием экспериментальных данных о сечениях взаимодействия пионов с ядрами из работ [9] и [10]. При этом предполагалось, что событие с ядерным взаимодействием не удовлетворит условиям отбора коллинеарных событий, если пион испытает любое неупругое взаимодействие, либо упруго рассеется на угол больший $\Delta\theta$. Интегрирование углового распределения упруго рассеянных пионов с кинетической энергией 165 МэВ показывает, что 66% событий упругого рассеяния летит вперед, а не регистрируется примерно 34% событий. Таким образом, ядерная поправка определялась как

$$\delta_{nucl} = \sigma_{tot} - 0.66\sigma_{elastic}.$$

Вообще говоря, угол раствора конуса упругого рассеяния должен меняться обратно пропорционально импульсу пиона и, тем самым, доля нерегистрируемых событий упругого рассеяния должна зависеть от энергии пиона. Однако, отметим, что величина сечения упругого рассеяния составляет лишь примерно одну четверть от полного сечения ядерных взаимодействий пиона.

Вычисленная таким образом поправка на 10 – 15 % превышает результаты моделирования при энергиях пионов выше 350 МэВ. Максимальное отличие – около 30 % – наблюдается в районе энергий 300 МэВ. Отметим, что все ядерные взаимодействия в моделированных заходах произошли в материале вакуумной трубки. Простая оценка соотношения длин ядерного взаимодействия в бериллии и аргоне и их толщин показывает, что в об'еме DC ядерных взаимодействий должно быть в четыре раза меньше, чем в бериллии. Кроме того, исчезновение пиона за счет ядерных взаимодействий далеко от оси пучков должно мало влиять на вероятность восстановления этого трека, поскольку он уже оставил на пути до распада достаточное количество точек (минимум 6). Вследствие этих обстоятельств, в поправку включены только ядерные взаимодействия в материале бериллиевой трубки.

Для вычисления поправки на распад пионов на лету, из моделирования было взято отношение $N_{decay}/N_{lost} = 0.195 \pm 0.05$ в интервале энергий пучка от 400 до 500 МэВ. Здесь N_{decay} – число событий с распадом пиона, N_{lost} – число событий, не прошедших критерии отбора.

Используемые при определении формфактора пиона поправки, величина которых зависит от энергии, сведены в Таблице 5. Зависимость поправок на ядерное взаимодействие и распады пионов от энергии приведена на Рис.7.

Изменения от точки к точке радиационных поправок для процесса Баба- рассеяния связаны со статистической точностью расчета, поэтому при вычислении формфактора бралось среднее по всей области энергий: $1 + \delta_e = 0.9434$.

Таблица 5: Поправки, зависящие от энергии.

Энергия МэВ	$1+\delta_e$	$1+\delta_\mu$	$1+\delta_\pi$	$1+\delta_{nucl}$	$1+\delta_{decay}$
509.428	0.94020	0.91381	1.01154	0.9958	0.99570
505.136	0.94377	0.94414	1.03008	0.9957	0.99565
500.303	0.94309	0.96671	1.05505	0.9956	0.99560
495.470	0.94320	0.97571	1.06557	0.9955	0.99555
490.528	0.94332	0.97994	1.07212	0.9954	0.99550
485.726	0.94113	0.98339	1.07758	0.9953	0.99545
480.758	0.94403	0.98585	1.08224	0.9952	0.99540
475.921	0.94458	0.98691	1.08513	0.9951	0.99535
471.097	0.94300	0.98978	1.08804	0.9950	0.99530
465.054	0.94477	0.99102	1.09251	0.9948	0.99525
459.778	0.94302	0.99289	1.09734	0.9947	0.99520
455.008	0.94422	0.99267	1.09873	0.9946	0.99515
450.019	0.94347	0.99496	1.10137	0.9944	0.99510
444.860	0.94185	0.99648	1.10196	0.9943	0.99503
439.921	0.94477	0.99816	1.10288	0.9942	0.99498
434.751	0.94426	0.99846	1.09952	0.9941	0.99492
429.798	0.94225	1.00082	1.09536	0.9939	0.99490
424.620	0.94293	1.00095	1.08782	0.9938	0.99480
419.550	0.94184	1.00197	1.07895	0.9937	0.99476
414.986	0.94176	1.00310	1.06655	0.9935	0.99470
410.012	0.94352	1.00425	1.05353	0.9934	0.99462
404.992	0.94010	1.00559	1.03724	0.9933	0.99455
399.953	0.94327	1.00759	1.02032	0.9931	0.99445
397.068	0.94180	1.01046	1.01080	0.9930	0.99443
395.048	0.94306	1.01341	1.00431	0.9929	0.99440
393.018	0.94277	1.01410	0.99709	0.9928	0.99433

4.3 Поправка, связанная с анизотропией угловых распределений.

Как отмечалось в пункте 2, используемое при отборе коллинеарных событий условие 8 в значительной степени подавляет обеднение заселенности углов вылета, близких к предельному. Однако, эффект, связанный с неизотропностью угловых распределений и зависящий от углового разрешения детектора, остается. Его величина показана на Рис.8 и не превышает долей процента для углового разрешения DC, которое после калибровок составляет 0.015 радиана.

4.4 Определение эффективности заряженного триггера с использованием калориметра CsI.

В области энергий пучка от 400 до 500 МэВ, обработка которой описывается в этом меморандуме, импульсы электронов, пионов и мюонов отличаются мало – при 400 МэВ разница импульсов электронов и пионов составляет 25 МэВ/c (6%). Вследствие этого, предполагается, что эффективность трекового процессора и эффективность реконструкции одинаковы для разных типов коллинеарных реакций.

В то же время, энерговыделения электронов в CsI существенно отличаются от энерговыделений пионов и мюонов и, соответственно, эффективность триггера, требующего превышения порога энерговыделения в линейке калориметра, может быть для них разной.

Наряду с использованием в заряженном триггере, сигналы срабатывания линеек CsI по-

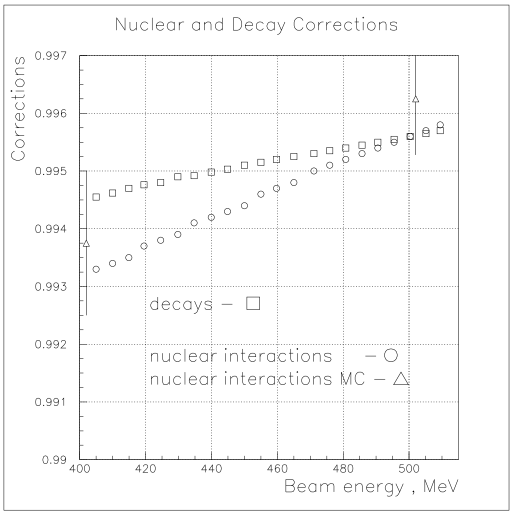

Рис. 7: Поправки на распады и ядерные взаимодействия.

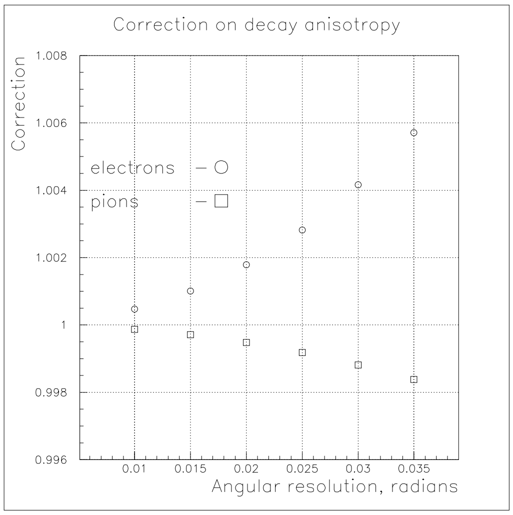

Рис. 8: Поправка, связанная с анизотропией угловых распределений.

даются на ТП платы для измерения времени пролета частиц. Зафиксированная в ТП платах информация используется для измерения эффективности CsI в соответствие с процедурой, описанной в [11]. Идея метода заключается в том, что для положительного решения заряженного триггера достаточно срабатывания только одной линейки калориметра. Измеряя, как часто не срабатывает калориметр в области второго трека, можно определить его эффективность.

Эффективность определялась по коллинеарным событиям, отобранным в соответствие с условиями, перечисленными в пункте 2. На Рис.9 представлено двумерное распределение энергий кластеров для этих событий. С помощью критерия $E_{clust1} + E_{clust2} > E_{beam}$ на этом распределении выделяются электроны, а обратному условию удовлетворяют пионы, мюоны и космический фон.

- Эффективность CsI для событий Баба.

  Среди электронных событий отбирались события, в которых нет срабатывания линеек CsI на продолжении одного из треков. Если N_1 число событий без срабатывания линейки на продолжении одного из треков, а N_2 – число событий, в которых линейки сработали на продолжении каждого трека, то выражение для вероятности срабатывания CsI на один трек и ее ошибки можно записать в виде:

$$\epsilon = \frac{1}{1 + N_1/(2 \cdot N_2)} \pm \epsilon \cdot \frac{N_1}{2N_2} \cdot \sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}}.$$

  При этом вероятность регистрации события есть:

$$\epsilon_{рег} = 1 - (1-\epsilon)^2 \pm 2(1-\epsilon) \cdot \sigma_\epsilon.$$

- Эффективность CsI для мюонов и фона космических частиц.

  В этом случае, на энерговыделения в CsI устанавливаются дополнительные требования – $130 > E_{clust1} > 50$ МэВ и $130 > E_{clust2} > 50$ МэВ. При этом выбирается левый нижний угол распределения, приведенного на Рис. 9. В этой области, конечно, есть и пионы, но только с малым энерговыделением на продолжении каждого трека и предположение о том, что эффективность CsI для них равна эффективности для мюонов и космических частиц, выглядит правдоподобной.

- Эффективность CsI для пионов.

  Требуется, чтобы энерговыделение, связанное либо с первым, либо со вторым треком, превышало 150 МэВ (и при этом, конечно, удовлетворяло условию $E_{clust1} + E_{clust2} < E_{beam}$). При этом отбираются события, в которых один из пионов, в результате ядерного взаимодействия, дает большое энерговыделение в CsI. Эффективность определяется для второго пиона, независимо от его энерговыделения.

Результаты определения эффективности калориметра CsI в триггере приведены в Таблице 6 и на Рис.10.

Таблица 6: Эффективность заряженного триггера с использованием калориметра CsI.

Энергия, МэВ	ϵ_{ee}	$\epsilon_{\mu\mu}$	$\epsilon_{\pi\pi}$
405 (Runs 4107 - 4115)	$0.9999 \pm 1.8 \cdot 10^{-6}$	0.999 ± 0.0001	0.999 ± 0.0003
405 (Runs 3164 - 3165)	$0.9999 \pm 5.3 \cdot 10^{-6}$	0.990 ± 0.002	0.990 ± 0.003
410	$0.9999 \pm 7.5 \cdot 10^{-6}$	0.989 ± 0.001	0.991 ± 0.002
435	$0.9999 \pm 8.7 \cdot 10^{-6}$	0.987 ± 0.002	0.989 ± 0.003
450	$0.9999 \pm 7.0 \cdot 10^{-6}$	0.985 ± 0.002	0.994 ± 0.002
455	$0.9999 \pm 4.6 \cdot 10^{-6}$	0.985 ± 0.002	0.991 ± 0.002
460	$0.9999 \pm 1.2 \cdot 10^{-5}$	0.985 ± 0.003	0.995 ± 0.002
465	$0.9999 \pm 6.1 \cdot 10^{-6}$	0.990 ± 0.001	0.990 ± 0.002
470	$0.9999 \pm 1.0 \cdot 10^{-6}$	0.984 ± 0.004	0.997 ± 0.003
475	$0.9999 \pm 2.6 \cdot 10^{-7}$	0.995 ± 0.001	0.994 ± 0.002
480	$0.9999 \pm 6.0 \cdot 10^{-7}$	0.994 ± 0.001	0.992 ± 0.002
485	$0.9999 \pm 5.2 \cdot 10^{-7}$	0.967 ± 0.003	0.961 ± 0.006
490	$0.9999 \pm 5.3 \cdot 10^{-6}$	0.617 ± 0.026	0.800 ± 0.022
495	$0.9999 \pm 1.9 \cdot 10^{-6}$	0.617 ± 0.019	0.803 ± 0.017
500	$0.9999 \pm 2.5 \cdot 10^{-6}$	0.572 ± 0.025	0.760 ± 0.025
505	$0.9999 \pm 2.8 \cdot 10^{-6}$	0.620 ± 0.027	0.779 ± 0.029

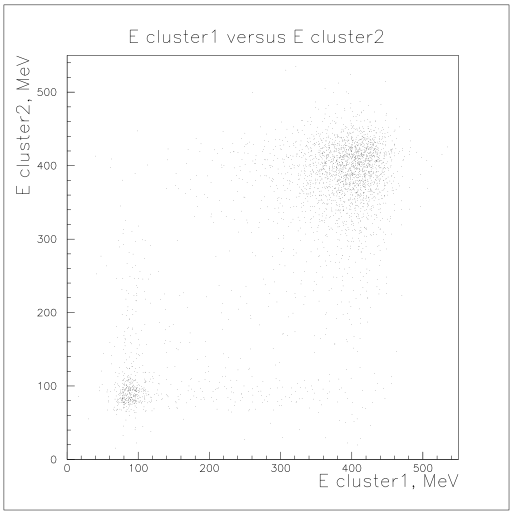

Рис. 9: Распределение энерговыделений в калориметре CsI.

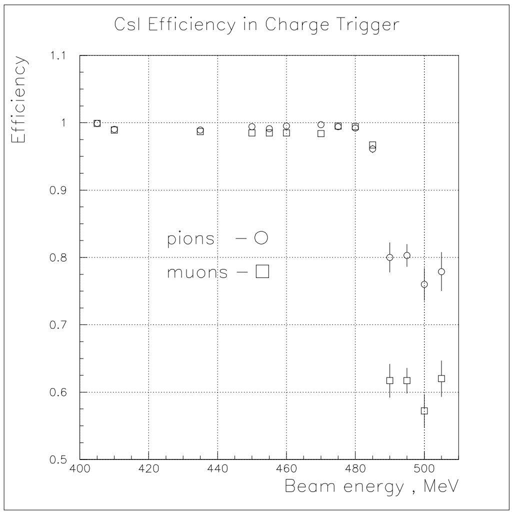

Рис. 10: Эффективность CsI в заряженном триггере.

5 Анализ систематических ошибок.

- Чувствительный об'ем области регистрации.

Поскольку угловое распределение событий Баба, на которые нормируются все сечения, существенно отличается от угловых распределений событий рождения пионов и мюонов (смотри пункт 3.4), точность определения полярного угла, внутри которого отбираются события, сильно влияет на точность измерения сечения рождения пары пионов. Степень этого влияния видна из Рис.11. Ошибка в 0.004 радиана приводит к изменению отношения сечений σ_π/σ_e на величину порядка 0.6 %.

Угол вылета частиц относительно оси пучков определяется с помощью измеренных в DC Z – координат точек трека. Как показал опыт – некоторые подробности можно найти в [12] – электронные калибровки дрейфовой камеры не обеспечивают необходимой точности. Для устранения систематических сдвигов при измерении Z – координат, была произведена калибровка DC с использованием информации из ZC согласно процедуре, описанной в [12]. Как видно из Рис.12, неточность определения угла отбора событий приводит к систематическим ошибкам определения сечения пары пионов не более 0.5 %. В то же время, видно, что дополнительные калибровки отдельных заходов могут существенно ее уменьшить.

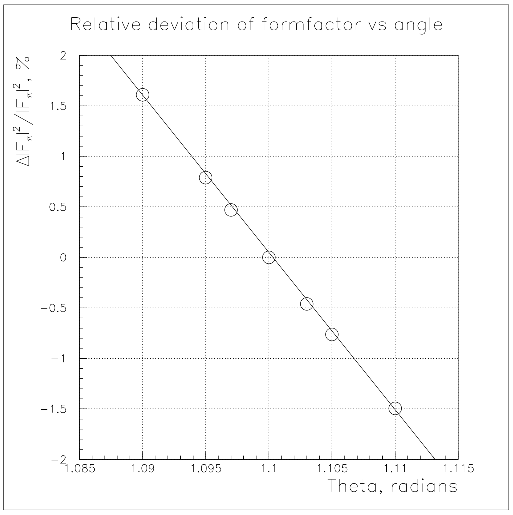

Рис. 11: Зависимость форфактора от предельного угла.

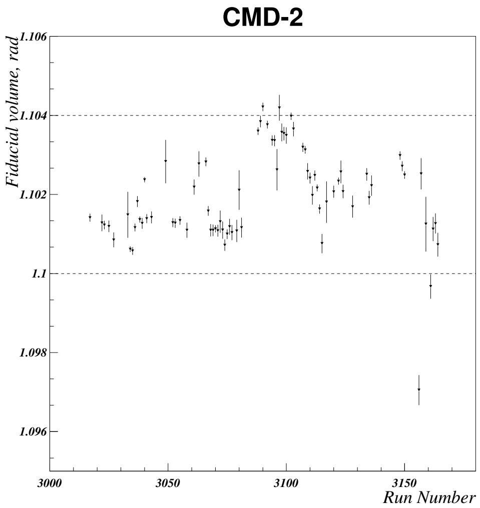

Рис. 12: Точность определения предельного угла.

- Радиационные поправки.

В соответствие с работой [7] (смотри, также, ссылки в этой работе), систематическая ошибка расчета радиационных поправок для процессов $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ и $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$, основанная на результатах работ [13] и [14], не превышает $0.2 \div 0.5$ %. По утверждению Э.Кураева (неопубликованному!), она, возможно, еще на порядок меньше и оценки вкладов высших поправок, которые он сейчас проводит, должны этот факт подтвердить.

Расчет радиационных поправок для процесса $e^+e^- \to e^+e^-$ проводится на основе результатов работы [15] с систематической ошибкой около 1%. Согласно тому же утверждению Э.Кураева, их совместные с В.Астаховым расчеты должны привести через пару месяцев к возможности вычислять эту поправку с точностью лучше десятой доли процента. К сожалению, никак не удается для завершения этого 'долгостроя' привлечь усилия других теоретиков ИЯФ, специалистов в этой тематике.

- Распады на лету.

  Как видно из Таблицы 5, в области энергий пучка от 400 до 500 МэВ, поправка на потери пионных событий вследствие распадов пионов на лету не превышает 0.6%. В соответствие со статистической точностью проведенного моделирования – Таблица 4 и последующее обсуждение – эта поправка известна с систематической точностью на уровне 0.1 %. Следовало бы проверить это утверждение, меняя разрешение DC в моделировании – может меняться эффективность восстановления и, тем самым, величина отношения N_{decay}/N_{lost}.

- Ядерные азаимодействия.

  Систематическая ошибка экспериментальных данных, использованных для вычисления поправки на ядерное взаимодействие пионов составляет около 20 %. Примерно с той же точностью совпадают результаты моделирования и ручного счета этих поправок. Будем считать это совпадение неслучайным и оценим систематическую погрешность их знания в 20 %.Тем самым, систематическая ошибка в абсолютной величине поправки на ядерные взаимодействия пионов не превышает 0.15 %.

  Суммарная систематическая ошибка оценивается в 1.1 % и, после завершения Э.Кураевым новых расчетов радиационных поправок для процесса $e^+e^- \to e^+e^-$, может быть уменьшена до уровня 0.5 %.

6 Результаты обработки.

Как уже отмечалось (2), было проведено 4 сеанса набора информации при энергии пучка 405 МэВ с разными условиями триггера. Сравнение полученных результатов приведено на Рис. 13 и в Таблице 7. Видно, что результаты всех четырех измерений хорошо совпадают.

Таблица 7: Четыре сеанса измерений с энергией пучка 405 МэВ.

Энергия	Заходы	Триггер	Светимость	Формфактор
404.992	3153,56,57,59, 61,62,63	TF∗3L∗L3+NT	10.7585 ± 0.1217	24.1039 ± 0.6370
404.992	3164,65	TF∗CsI+NT	3.5805 ± 0.0629	22.9296 ± 0.9719
405.002	4107,09,10,11, 12,13,14,15	TF∗CsI+NT	8.3836 ± 0.1017	22.6790 ± 0.6608
405.005	4118,19,20,22, 26,27 28,29, 30,31	TF∗3L∗L3+NT	10.2150 ± 0.1257	26.2410 ± 0.7215
Без захода 4131 с неправильной калибровкой CsI				
405.005	4118,19,20,22, 26,27 28,29, 30	TF∗3L∗L3+NT	6.6920 ± 0.0898	23.338 ± 0.7450

В соответствие со всем вышеизложенным, обработка информации в области энергий в системе центра масс от 2x392 МэВ до 2x505 МэВ дала результаты, представленные в Таблице 8 и на Рис. 14, где указаны только статистические ошибки. Значения формфактора и сечения в точке 405 МэВ получены усреднением по всем четырем сеансам измерений.

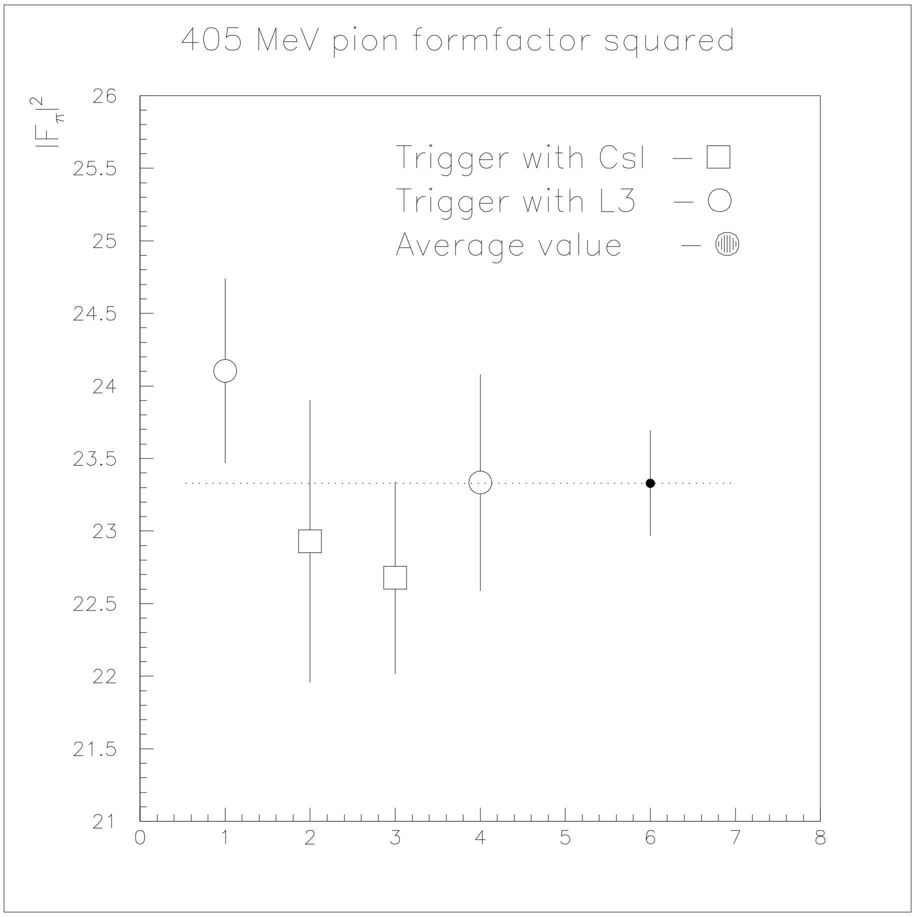

Рис. 13: Четыре сеанса измерений с энергией пучка 405 МэВ.

7 Что надо сделать еще.

1 Энерговыделение электронов	Кузьмин, Суханов
2 Включение в CMD2PI распределения импульсов,	
подогнанных одной дугой	Шер??, Хазин
3 Систематики в CMD2PI	Максимов, Хазин
Чувствительность ответа к обрезаниям	
Чувствительность ответа к E1%E2	
4 Выделение мюонов по пробегам	Шубин
5 Использование временной привязки событий	
6 Изучение третичного триггера	Логашенко
7 Моделирование поправок	Черняк
8 Изучение калибровок DC по ZC	Черняк

8 Приложение 1.

Для того, чтобы параметры e_i и p_i одновременно удовлетворяли условиям

$$0 < p_i < 1, \quad 0 < e_i < 1 \quad и$$

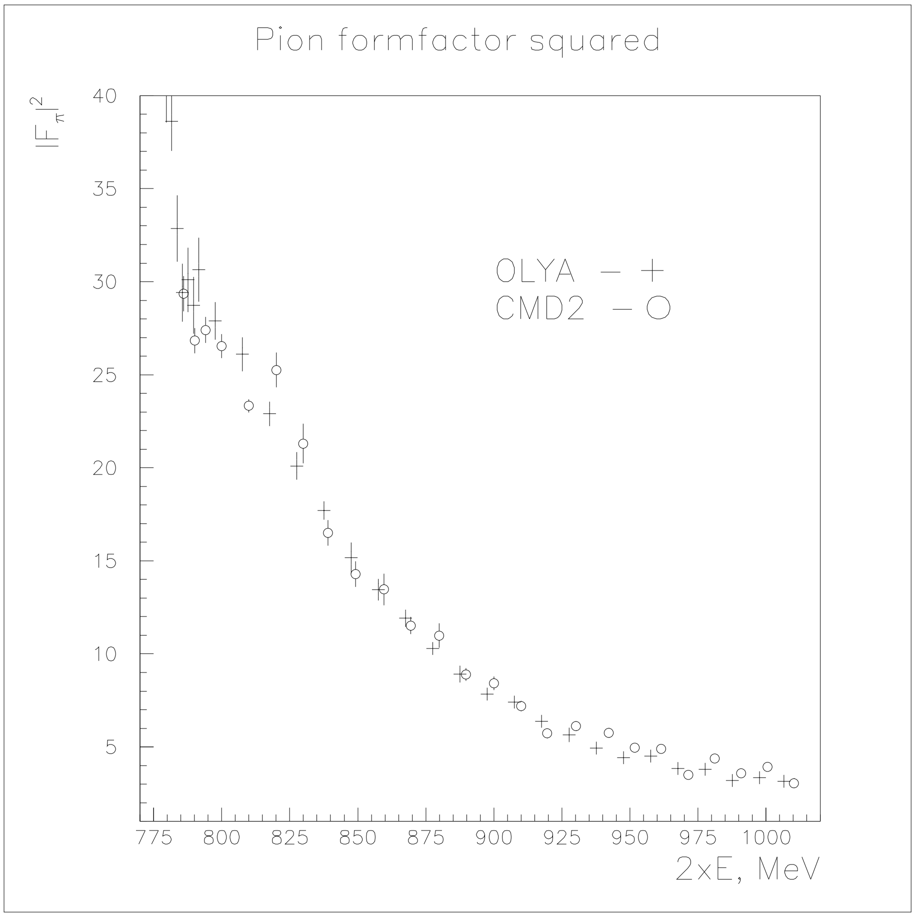

Рис. 14: Квадрат формфактора заряженного пиона.

$$\sum_i p_i = 1, \quad \sum_i e_i = 1,$$

в программе CMD2PI использована следующая процедура:

1. Из двумерного распределения E_{clust1} от E_{clust2} определяются начальные значения параметров e_i и p_i.

2. Максимальные из них фиксируются и не изменяются в процессе оптимизации. Тем самым, параметры p_i и e_i 'развязываются' с параметрами N_e и R.

3. Для определения физических значений глобальных параметров, определенные в процессе оптимизации, величины перенормируются следующим образом:

$$N_{ephys} = N_e \sum e_i \cdot e_j = N_e \left(\sum e_i \right)^2.$$

$$R_{phys} = R \cdot \frac{\left(\sum p_i\right)^2}{\left(\sum e_i\right)^2}.$$

Список литературы

[1] *В.А.Монич* Третичный триггер КМД-2. Меморандум КМД-2, L3003, 17 июня 1994.

Таблица 8: Результаты измерения сечения $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ и квадрата формфактора пиона.

Энергия пучка, МэВ	Интеграл светимости, *нбн*$^{-1}$	Сечение, *нбн*	Квадрат формфактора
505.136	20.20 ± 0.09	57.64 ± 4.65	3.05 ± 0.24
500.305	26.57 ± 0.12	75.38 ± 4.68	3.92 ± 0.24
495.470	38.02 ± 0.13	70.04 ± 3.49	3.59 ± 0.17
490.598	19.77 ± 0.10	87.10 ± 4.01	4.38 ± 0.20
485.726	32.70 ± 0.13	70.93 ± 2.55	3.51 ± 0.13
480.758	17.77 ± 0.12	100.84 ± 4.55	4.90 ± 0.22
475.921	20.01 ± 0.12	103.76 ± 4.36	4.95 ± 0.21
471.097	15.75 ± 0.11	122.75 ± 5.23	5.76 ± 0.25
465.054	16.40 ± 0.12	133.39 ± 5.37	6.12 ± 0.25
459.778	12.53 ± 0.09	127.17 ± 5.69	5.72 ± 0.26
455.008	13.44 ± 0.11	162.69 ± 6.53	7.20 ± 0.29
450.019	9.78 ± 0.10	193.99 ± 8.52	8.42 ± 0.37
444.860	11.60 ± 0.11	208.75 ± 8.21	8.89 ± 0.35
439.921	4.04 ± 0.07	262.84 ± 15.52	10.99 ± 0.65
434.751	8.39 ± 0.10	281.20 ± 11.51	11.53 ± 0.47
429.798	2.90 ± 0.06	334.80 ± 21.25	13.47 ± 0.85
424.620	4.90 ± 0.08	362.45 ± 17.27	14.29 ± 0.68
419.550	5.31 ± 0.08	426.78 ± 17.65	16.50 ± 0.68
414.986	3.48 ± 0.07	560.90 ± 28.06	21.30 ± 1.07
410.012	6.02 ± 0.10	677.94 ± 25.07	25.25 ± 0.93
404.998	29.41 ± 0.19	638.76 ± 9.92	23.33 ± 0.36
400.009	10.75 ± 0.12	740.86 ± 17.97	26.53 ± 0.64
397.068	9.23 ± 0.11	774.27 ± 19.88	27.41 ± 0.70
395.048	9.41 ± 0.10	764.17 ± 19.20	26.83 ± 0.67
393.018	5.86 ± 0.09	842.72 ± 27.01	29.35 ± 0.94

[2] *V.A.Monich* CMD2 Particle Identification Project. Version 1.02. February 1995.

[3] *П.А.Лукин* Восстановление импульсов заряженных частиц в дрейфовой камере КМД-2. Состояние на октябрь 1995 года. Меморандум КМД-2, DC-12, 1995.

[4] *М.А.Шубин* Функция распределения энергии кластера в CsI калориметре для минимально ионизирующих частиц. Меморандум КМД-2, 05/04/1995.

[5] Minuit Reference Manual, CERN Program Library, Long Writeup D506, Version 94.1, March 1994.

[6] *J.Orir* Заметки о статистике для физиков. Препринт ИЯФ, Р-292, 1967. Proceedings of the III ICFA School on Instrumentation in Elementary Particle Physics. Rio de Janeiro, Brazil 16 - 28 July 1990, p.353.

[7] *G.V.Fedotovich et al.* Measurement of the $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ Cross Section in the Energy Range between ρ and ϕ Mesons, DAFNE, Italy, 1995.

[8] *Г.Н.Шестаков* Сечение $e^+e^- \to$ *адроны* и аномальный магнитный момент мюона. Меморандум КМД-2, Phys-40, Апрель, 1994.

[9] A.S.Carrol et al., Phys.Rev. C, 14, 635 (1976).

[10] D.Ashery et al., Phys.Rev. C, 23, 2173 (1981).

[11] *А.Суханов* Определение эффективности CsI калориметра КМД-2. Меморандум КМД-2, 16 сентября 1994.

[12] *Б.И.Хазин и Д.В.Черняк* Восстановление Z - координаты в дрейфовой камере. Меморандум КМД-2, DC-11, 3 мая 1995.

[13] *E.A.Kuraev and V.S.Fadin,* Soviet Journal of Nuclear Physics, 41, 466 (1985).

[14] *E.A.Kuraev et al.*, To be published.

[15] *F.A.Berends and R.Kleiss*, Nucl.Phys., B228, 537 (1983).

[16] *B.A.Shwartz et al.*, Про корреляционную матрицу