Усреднение комптоновских энергий

Никита Петров

3 ноября 2022 г.

Необходимо сопоставить и усреднить измерения энергий по Комптону для каждой точки по энергии КМД-3. Дополнительные подробности можно найти в презентации [1].

1 Историческая часть

Энергия пучка в коллайдере ВЭПП-2000 измеряется с помощью обратного комптоновского рассеяния (Compton backscattering) [2]. Такие измерения отличаются высокой точностью $\Delta E_{CBS}/E_{CBS} = 6 \cdot 10^{-5}$.

2 Метод

Кратко метод усреднения можно описать так: я беру измерения энергий по комптону, соответствующие определённой энергетической точке, и присваиваю каждому измерению вес равный светимости, набранной за период этого измерения. Полученный набор точек с весами я отправляю в функцию максимального правдоподобия и получаю усреднённое значение энергии, а также статистическую и систематическую ошибку.

2.1 Сопоставление измерений энергии по комптону с заходами КМД-3

Измерения энергий по комптону сопоставляются с заходами КМД-3 по времени измерения. Каждому измерению энергии присваивается вес равный суммарной светимости заходов, набранных за время измерения энергии.

Правила сопоставления:

- Если в одно измерение комптоновской энергии попадает несколько заходов КМД-3, то весом для измерения будет суммарная светимость всех попавших в это измерение заходов.
- Если один заход попадает на два комптоновских измерения, то вся его светимость приписывается к измерению, с которым общее время было больше.
- Если во время захода не было комптоновских измерений, то светимость такого захода ни к чему не приписывается.

2.2 Функция наибольшего правдоподобия

После того как каждому измерению энергии по комптону я приписал вес, я усредняю комптоновские энергии с помощью лайклихуда (функции максимального правдоподобия), которая выглядит так:

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^{N} [G(\mu, \sigma_{mes}, E_i, \delta E_i)]^{w_i}, \tag{1}$$

$$G(\mu, \sigma_{mes}, E_i, \delta E_i) = \left| s_i \equiv \sqrt{\sigma_{mes}^2 + \delta E_i^2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi s_i^2}} \exp\left(-\frac{(\mu - E_i)^2}{2s_i^2} \right),$$

где $\mathcal{L}$ – лайклихуд [3], N – количество комптоновских измерений в конкретной точке по энергии, μ – усреднённая энергия по комптоновским измерениям, σ_{mes} – ошибка усреднения из-за разброса средних энергий комптоновских измерений (mean energy spread), E_i – средняя энергия в i-м комптоновском измерении, δE_i – ошибка измерения средней энергии в i-м комптоновском измерении, w_i – вес i-го комптоновского измерения ($w_i = L_i/\bar{L}$, отношение светимости сопоставленной i-му комптоновскому измерению к средней светимости измерений).

Из минимизации $-\ln \mathcal{L}$ я извлекаю оценку усреднённой энергии ($\hat{\mu}$), ошибки ($\hat{\sigma}_{mes}$), связанной с разбросом средних энергий в разных комптоновских измерениях, а также статистическую ошибку усреднения как ошибку оценки параметра μ.

Из формулы 1 можно аналитически получить оценку $\hat{\mu}$ и её погрешность $\delta\hat{\mu}$, это будет полезно для сравнения с альтернативными методами усреднения энергии:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_i k_i E_i}{\sum_i k_i}$$

$$\delta\hat{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\sum_i k_i}}$$

$$k_i = \frac{L_i}{\sigma_i^2},$$

2.2.1 Появление функции правдоподобия

Используемая функция правдоподобия возникает из предположения о постоянстве средней энергии в пределах одной энергетической точки.

Рассмотрим самый простой пример: допустим, что средняя энергия жёстко зафиксирована и равна некой константе ϵ на протяжении измерений в пределах конкретной энергетической точки, кроме того, все измерения средних энергий по комптону входят с одинаковыми светимостями, тогда для набора из N измерений можно записать следующую функцию для оценки этой константы:

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^{N} F(\hat{\epsilon}, E_i, \delta E_i),$$

$$F(\hat{\epsilon}, E_i, \delta E_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \delta {E_i}^2}} \exp\left(-\frac{(\mu - E_i)^2}{2 \cdot \delta {E_i}^2} \right)$$

минимизация этой функции приведёт нас к оценке средней энергии $\hat{\epsilon}$.

Теперь немного усложняем ситуацию, допустим, что в каждом измерении присутствует неучтённая систематическая погрешность (например, средняя энергия дрейфует на больших временах), эту погрешность (σ_{mes}) можно вписать в ошибку для каждого измерения комптона и получить следующую функцию правдоподобия:

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^{N} F(\hat{\epsilon}, \hat{\sigma}_{mes}, E_i, \delta E_i),$$
$$F(\hat{\epsilon}, \hat{\sigma}_{mes}, E_i, \delta E_i) = \left| s_i \equiv \sqrt{\hat{\sigma}_{mes}^2 + \delta E_i^2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi s_i{}^2}} \exp\left(-\frac{(\mu - E_i)^2}{2 \cdot s_i{}^2} \right)$$

минимизация этой функции приведёт нас к оценке средней энергии $\hat{\epsilon}$ и погрешности $\hat{\sigma}_{mes}$. В данном случае стоит отметить, что погрешность масштабирует ошибку среднего (не совсем так, как это делается в фите того же PDG, но что-то похожее есть).

Теперь нужно учесть веса каждого измерения. Поскольку светимость пропорциональна количеству событий, то относительные веса каждого измерения соответствуют $L_1 : L_2 : ... : L_n$, однако остаётся неопределённой общая константа C (т.е. $w_i = L_i/C$), для того, чтобы согласовать w_i со случаем одинаковых весов $w_i = 1$, то можно считать $C = \bar{L}$ — средним значением светимости (однако это спорное утверждение, поскольку бесконечное множество других констант обладает тем же свойством, единственное, что нет никаких оснований использовать степени L_i, поэтому остаётся только $\bar{L}$).

2.3 Сравнение с предыдущим методом усреднения

Текущий метод усреднения, описанный выше, является альтернативой методу, используемому ранее и представленному здесь, в котором оценка усреднённой энергии ($\hat{\mu}_{\text{old}}$) вычислялась следующим образом:

$$\hat{\mu}_{\text{old}} = \frac{\sum_i L_i E_i}{\sum_i L_i}$$
$$\delta\hat{\mu}_{\text{old}} = \frac{\sqrt{\sum_i (L_i \delta E_i)^2}}{\sum_i L_i},$$

а оценки для ошибки, связанной с разбросом средних энергий комптоновских измерений не проводилось (здесь это в принципе невозможно, т.к. не делается предположений о постоянстве энергии в течение измерений).

Сравним результаты (для оценки усреднённой энергии) на нескольких примерах для двух измерений комптоновских энергий:

2.3.1 Тривиальный случай: E_i, δE_i, L_i равны

Обозначаю $E \equiv E_1 = E_2$, $\delta E \equiv \delta E_1 = \delta E_2$, $L \equiv L_1 = L_2$. В первом методе $\sigma_{mes} = 0$, тогда получаем:

$$\hat{\mu} = E,$$
$$\delta\hat{\mu} = \frac{\delta E}{\sqrt{2}},$$

Согласно второму методу

$$\hat{\mu}_{\text{old}} = E,$$
$$\delta\hat{\mu}_{\text{old}} = \frac{\delta E}{\sqrt{2}}$$

2.3.2 δE_i равны, E_i, L_i различаются

Обозначаю $\delta E \equiv \delta E_1 = \delta E_2$. Считаю, что $|E_1 - E_2| \ll \delta E$, чтоб в первом методе $\sigma_{mes} = 0$, тогда:

$$\hat{\mu} = \frac{L_1 E_1 + L_2 E_2}{L_1 + L_2},$$
$$\delta\hat{\mu} = \frac{\delta E}{\sqrt{2}},$$

Согласно второму методу

$$\hat{\mu}_{\text{old}} = \frac{L_1 E_1 + L_2 E_2}{L_1 + L_2},$$
$$\delta\hat{\mu}_{\text{old}} = \frac{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}}{L_1 + L_2}\delta E$$

2.3.3 L_i равны, E_i, δE_i различаются

Обозначаю $L \equiv L_1 = L_2$. Считаю, что $|E_1 - E_2| \ll \delta E$, чтоб в первом методе $\sigma_{mes} = 0$, тогда:

$$\hat{\mu} = \left(\frac{E_1}{\delta E_1^2} + \frac{E_2}{\delta E_2^2}\right) \Big/ \left(\frac{1}{\delta E_1^2} + \frac{1}{\delta E_2^2}\right),$$
$$\delta\hat{\mu} = 1/\sqrt{\frac{1}{\delta E_1^2} + \frac{1}{\delta E_2^2}},$$

Согласно второму методу

$$\hat{\mu}_{\text{old}} = \frac{E_1 + E_2}{2},$$
$$\delta\hat{\mu}_{\text{old}} = \frac{\sqrt{\delta E_1^2 + \delta E_2^2}}{2}$$

В критическом случае $\delta E_1 \gg \delta E_2$ получаем приближения ошибок:

$$\delta\hat{\mu} = \delta E_2 \left(1 - \frac{\delta E_1^2}{2\delta E_2^2}\right)$$
$$\delta\hat{\mu}_{\text{old}} = \frac{\delta E_1}{2} \left(1 + \frac{\delta E_2^2}{2\delta E_1^2}\right)$$

Список литературы

[1] N. Petrov, “Усреднение комптоновских измерений энергии.” `https://cmd.inp.nsk.su/docdb/cgi-bin/ShowDocument?docid=419`.

[2] E. V. Abakumova *et al.*, “A system of beam energy measurement based on the Compton backscattered laser photons for the VEPP-2000 electron–positron collider,” *Nucl. Instrum. Meth. A*, vol. 744, pp. 35–40, 2014.

[3] M. A. Newton and A. E. Raftery, “Approximate bayesian inference with the weighted likelihood bootstrap,” *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, vol. 56, no. 1, pp. 3–26, 1994.