

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ ИМ. Г.И. БУДКЕРА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Козырев Евгений Анатольевич

**ИЗУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СВОЙСТВ
МЕЗОНОВ С ДЕТЕКТОРОМ *BAVAR***

Специальность 01.04.16

«физика атомного ядра и элементарных частиц»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Солодов Евгений Петрович

Новосибирск — 2020

Оглавление

	Стр.
Глава 1. Эксперимент <i>BABAR</i>	9
1.1 Ассиметричный коллайдер PEP-II	9
1.2 Детектор <i>BABAR</i>	11
Глава 2. Изучение процесса $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$	17
2.1 Методика ISR	18
2.2 Экспериментальные и моделированные данные	18
2.3 Отбор сигнальных событий	20
2.3.1 Нормировка фона $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$	26
2.4 Вычитание фона	32
2.5 Эффективность регистрации и систематические ошибки	36
2.5.1 Триггеры и фильтры	39
2.5.2 Радиационная поправка	40
2.5.3 Эффективность реконструкции фотонов	40
2.5.4 Эффективность реконструкции ISR фотона	43
2.5.5 Эффективность реконструкции треков	44
2.6 Сечение процесса $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$	47
2.7 Аппроксимация энергетической зависимости сечения $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$	51
2.8 Проверка гипотезы о сохранении векторно тока	56
2.9 Вклад в аномальный магнитный момент мюона a_μ	59
2.10 Распад $J/\psi \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$	59
Глава 3. Измерение переходного форм-фактора $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \eta'$	62
3.1 Вступление	62
3.2 Теоретические представления ПФФ $F_{\eta'}(Q_1^2, Q_2^2)$	63
3.3 Моделирование двухфотонных процессов	65
3.4 Отбор сигнальных событий	66
3.5 Пикованный фон	73
3.6 Эффективность регистрации сигнальных событий	76

3.7	Сечение процесса $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\eta'$ и переходный форм-фактор η' -мезона	79
3.8	Систематические ошибки	80
3.9	Модельная неопределенность	81
3.10	Обсуждение результатов	82
Глава 4. Заключение		83
Литература		84

Введение

Нет в оглавлении

Пробел

Изучение процессов взаимодействия электромагнитного поля (ЭМП) с мезонами позволяет получить уникальную информацию об их свойствах и структуре. Переход фотонов в мезоны происходит посредством взаимодействия ЭМП с кварк-антикварковой парой и последующей адронизацией кварков. Последний процесс не описывается точно в рамках пертурбативной квантовой хромодинамики (пКХД), поэтому лишь экспериментальные данные могут пролить свет на характер взаимодействия легких кварков. Данная работа посвящена изучению процессов перехода $\gamma^* \rightarrow \rho^{(\prime)} \rightarrow \eta \pi^+ \pi^-$ [1], и $\gamma^* \gamma^* \rightarrow \eta'$ [2] с детектором *BABAR* на коллайдере PEP-II (Калифорния, США), представленные на рисунках 0.1, 0.2, соответственно. В первом процессе рассматривается вершина перехода двух векторных мезонов ($J^{PC} = 1^{--}$) с положительной виртуальностью в псевдоскалярный η -мезон. Второй процесс состоит в переходе двух фотонов ($J^{PC} = 1^{--}$) с отрицательной виртуальностью в псевдоскалярный η' -мезон. Таким образом, в обоих процессах рассматривается переход двух векторных полей в псевдоскалярное поле, причем первый процесс соответствует времениподобной области, второй - пространственноподобной.

История исследований реакции $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$ уходит далеко в прошлое с непрерывной тенденцией увеличения точности по мере возникновения все более прецизионных экспериментов. К таким экспериментам относятся исследования на детекторах DM1 [3], ND [4], DM2 [5], CMD-2 [6], SND [9, 11, 10], CMD-3 [14]. С детектором *BABAR* искомая реакция изучалась трижды: в каналах $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ ($B = 2.7\%$), $\eta \rightarrow 3\pi^0$ ($B = 32.6\%$) и $\eta \rightarrow 2\gamma$ ($B = 39.3\%$) в работах [7, 8, 1], соответственно. Последняя работа с двухфотонной модой распа-

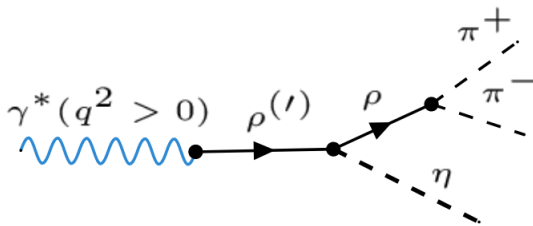


Рис. 0.1 — Фейнмановская диаграмма процесса перехода виртуального фотона в систему $2\pi\eta$.

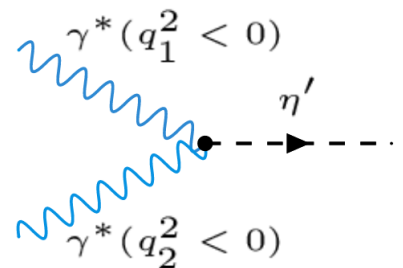


Рис. 0.2 — Фейнмановская диаграмма двухфотонного рождения η' -мезона.

Таблица 1 — Сводные данные истории исследований процесса $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$.

	ссылка	год	\sqrt{s} , ГэВ	мода распада η	N событий
[3]	DM1 at DCI	1982	$1.4 \div 2.18$	$\eta \rightarrow all$	~ 200
[4]	ND at VEPP-2M	1986	$1.05 \div 1.4$	$\eta \rightarrow 2\gamma$	~ 15
[5]	DM2 at DCI	1988	$1.35 \div 2.4$	$\eta \rightarrow 2\gamma, 3\pi, 2\pi\gamma$	228
[6]	CMD-2 at VEPP-2M	2000	$1.28 \div 1.38$	$\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$	~ 100
[7]	<i>BABAR</i> at PEP-II	2007	$1 \div 3$	$\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$	~ 1900
[9]	SND at VEPP-2M	2010	$1.08 \div 1.38$	$\eta \rightarrow 2\gamma$	~ 1600
[10]	SND at VEPP-2000	2015	$1.225 \div 2$	$\eta \rightarrow 2\gamma$	~ 5000
[1]	<i>BABAR</i> at PEP-II	2018	$1.15 \div 3.5$	$\eta \rightarrow 2\gamma$	~ 8000
[11]	SND at VEPP-2000	2018	$1.075 \div 2$	$\eta \rightarrow 3\pi^0$	~ 2500
[8]	<i>BABAR</i> at PEP-II	2018	$1.075 \div 3.025$	$\eta \rightarrow 3\pi^0$	2102
[14]	CMD-3 at VEPP-2000	2019	$1.1 \div 2$	$\eta \rightarrow 2\gamma$	13426

да η -мезона и составляет часть настоящей диссертации. Также сечение реакции $e^+e^- \rightarrow \rho\eta$ при энергиях $\sqrt{s} = 3.650, 3.686$ и 3.773 ГэВ было измерено с детектором BES [12], а при энергии $\sqrt{s} = 10.58$ ГэВ с детектором Belle [13]. Сводные данные истории исследований процесса $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$ представлены в таблице 1 в хронологическом порядке, где представлены в том числе год публикации, диапазон энергии, детектируемая мода распада η -мезона и количество сигнальных событий. Жирным шрифтом в таблице выделено данное исследование, речь о котором пойдет ниже. Видно, что на момент публикации оно было самым точным. Сечение реакции $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$, измеренное в предыдущих экспериментах до 2018 года, представлено на рисунке 0.3. Видно, что точность этих измерений не превышает 10%. Кроме того, на представленной зависимости сечения от энергии не прослеживается явный вклад промежуточного состояния $\rho(1700)$. Так, в работе коллаборации СНД с модой распада $\eta \rightarrow 2\gamma$ [10] измеренное произведение констант связи с $\rho(1700)$ составляет $g_{\rho(1700)} = 0.02_{-0.01}^{+0.03}$ ГэВ $^{-1}$, что требует уточнения.

Как описано выше, более различных исследований было посвящено искомому процессу. Столь активное внимание к данной реакции можно связать с рядом мотивирующих аспектов. Во-первых, сечение процесса электрон-позитронной аннигиляции в $\pi^+\pi^-\eta$ составляет около 5% от полного сечения e^+e^- в адроны при $\sqrt{s} = 1.5$ ГэВ. Поэтому его прецизионное экспериментальное изме-

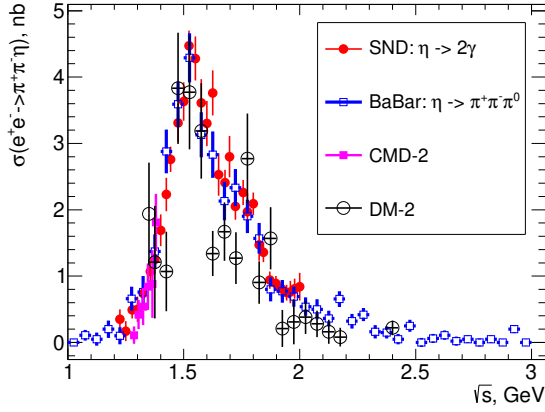


Рис. 0.3 — Сечение реакции $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$, измеренное в предыдущих экспериментах.

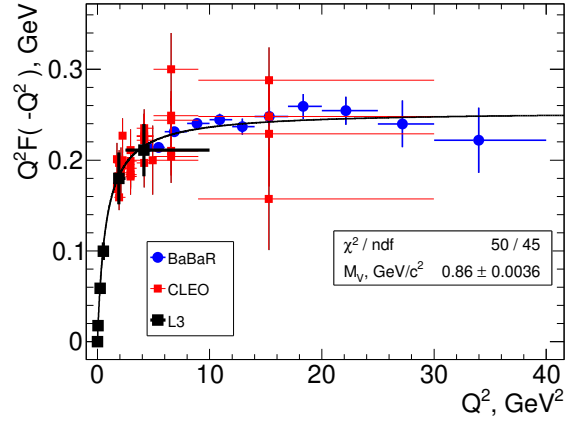


Рис. 0.4 — Переходный форм-фактор η' -мезона в зависимости от виртуальности фотона.

рение позволит уточнить вычисления адронного вклада в поляризацию вакуума в диапазоне энергии 1.2–3.5 ГэВ. Этот вклад нужно рассматривать при расчете аномального магнитного момента мюона a_μ значения бегущей константы электромагнитного взаимодействия на массе Z -бозона.

Второе важное обстоятельство связано с тем, что система $\pi^+\pi^-\eta$ обладает положительной G -четностью, то есть путем сильных взаимодействий может рождаться только через промежуточные состояния изовекторного типа (через ρ -подобные состояния). Это обуславливает ключевую роль искомого канала в определении параметров таких резонансов, как $\rho(1450)$, $\rho(1700)$ и более возбужденных состояний. Нужно также отметить, что кроме вклада G -четных резонансов, имеет место электромагнитное смешивание, например, $\omega^{(\prime)} \rightarrow \gamma \rightarrow \rho^{(\prime)} \rightarrow \rho\eta$ или $\rho^{(\prime)} \rightarrow \rho\eta \rightarrow \gamma\eta \rightarrow \omega\eta \rightarrow \gamma\eta \rightarrow \rho\eta$. Однако вклад такого смешивания не превышает нескольких процентов, что видно уже из вероятности распада $B(\omega \rightarrow 2\pi) = 1.53 \pm 0.06$ [53].

Вторая часть диссертации посвящена измерению переходного форм-фактора (ПФФ) псевдоскалярного мезона η' ($J^{PC} = 0^{-+}$), используя реакцию $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\eta'$, где оба рассеянных электрона¹ испускают пространственно-подобные фотоны, которые конвертируются в η' -мезон, как показано на рисунке 0.2. Матричный элемент $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \eta'$ можно представить в виде

$$T = -i4\pi\alpha\epsilon_{\mu\nu\beta\gamma}\epsilon_1^\mu\epsilon_2^\nu q_1^\beta q_2^\gamma F_{\eta'}(Q_1^2, Q_2^2), \quad (1)$$

¹везде, где не оговорено обратное, под электроном подразумевается и электрон, и позитрон

где α - электромагнитная постоянная тонкой структуры, $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ - полностью антисимметричный тензор Леви-Чевита, $\varepsilon_{1,2}$ и $q_{1,2}$ - вектора поляризации и четырехимпульсы пространственно-подобных фотонов, соответственно, $Q_{1,2}^2 = -q_{1,2}^2$, $F_{\eta'}(Q_1^2, Q_2^2)$ - переходный форм-фактор (ПФФ) η' -мезона.

Существует множество экспериментальных данных ПФФ в кинематической области, когда один из фотонов почти реальный, а второй фотон виртуальный, то есть $(Q^2, 0)$. Временноподобная область ($Q^2 < 0$) изучалась в реакции однофотонной аннигиляции $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \eta'$. Пространственноподобная область ($Q^2 > 0$) изучалась в реакции $e^+e^- \rightarrow \eta'e^+e^-$ в нескольких экспериментах [55, 56, 57, 58, 59]. Наиболее точные измерения были проведены в эксперименте CLEO [58] и затем BABAR [59] при $1.5 < Q^2 < 30$ ГэВ² и $4 < Q^2 < 40$ ГэВ², соответственно. Указанные измерения неплохо согласуются друг с другом, представлены на рисунке 0.4 и аппроксимированы функцией монополя в виде $Q^2 \cdot F(0,0)/(Q^2/M_V^2 + 1)$. Здесь $F(0,0)$ зафиксировано шириной распада η' -мезона на два фотона, что будет обсуждаться ниже. Приведенная функция со значением $M_V = 0.862 \pm 0.003$ ГэВ/с² суммарно описывает вклад низких векторных резонансов ρ , ω , ϕ и корректно описывает поведение форм-фактора при больших значениях Q^2 , также как и п. Д, предсказывающая асимптотическую динамику $F(Q^2, 0) \sim \frac{const}{Q^2}$.

Настоящая работа посвящена измерению ПФФ η' -мезона $F_{\eta'}(Q_1^2, Q_2^2)$ при $Q_{1,2}^2 > 0$, т.е. когда оба промежуточных фотона принадлежат пространственноподобной области. Форм-факторы псевдоскалярных мезонов в этих условиях не были измерены в исследованиях других экспериментов. Однако существуют теоритические предсказания. Так, ниже будет обсуждаться сравнение полученных данных по $F_{\eta'}(Q_1^2, Q_2^2)$ с предсказаниями модели векторной доминантности (МВД) и пКХД.

На защиту диссертации выносятся следующие положения.

- Измерено сечение процесса $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$ в области энергии в системе центра масс от 1.2 ГэВ до 3.5 ГэВ.
- Произведена аппроксимация зависимости сечения $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$ от энергии в рамках МВД мезонов с учетом вкладов ρ -мезона и трех его возбужденных состояний.
- С использованием гипотезы сохранения векторного тока было проведено сравнение данных по сечению процесса $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$ с данными по распаду $\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0\eta\nu_\tau$.

- Измерен переходной форм-фактор $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \eta'$ в дважды виртуальной области $(F(Q_1^2, Q_2^2))$.
- Произведено сравнение $F(Q_1^2, Q_2^2)$ с теоритическими предсказаниями.

Объем и структура работы. Работа состоит из введения, четырёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём дипломной работы составляет 88 страниц, включая 71 рисунок и 14 таблиц.

Глава 1. Эксперимент *BABAR*

Набор данных в ходе эксперимента *BABAR* производился в период 1999-2008 годов в Стэнфордском центре линейных ускорителей в городе Менло Парк, Калифорния. Ассиметричный электрон-позитронный коллайдер PEP-II работал при энергии 10.58 ГэВ в системе центра масс, что соответствует массе резонанса $\Upsilon(4S)$, чуть большей, чем порог рождения пары мезонов $B\bar{B}$. Ввиду большого значения сечения образования пар B мезонов ($\sigma = 1.05 \text{ nb}$) [16] при данной энергии и высокой светимости PEP-II, такой эксперимент назывался B -фабрикой.

1.1 Ассиметричный коллайдер PEP-II

Схематичный вид ускорительного комплекса с детектором *BABAR* представлен на рисунке 1.1. Комплекс включает электронную пушку, линейный ускоритель, источник позитронов, e^+e^- накопительные кольца (PEP-II).

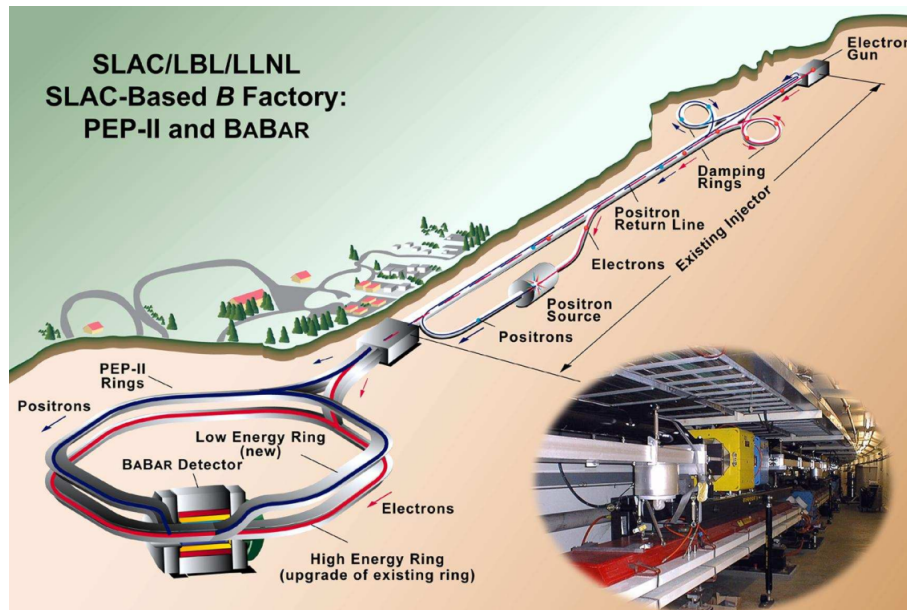


Рис. 1.1 — Схематичный вид ускорительного комплекса SLAC, включая линейный ускоритель, ассиметричный коллайдер PEP-II с детектором *BABAR*.

Электронная пушка производит электронные сгустки и инжектирует их в линейный ускоритель. Высокочастотный резонатор (ВЧ) синхронизированными импульсами ускоряют эти пучки до энергии около 1 ГэВ. Далее половина пучков инжектируется в демпфирующее кольцо, где потери энергии за счет синхротронного излучения компенсируются (ВЧ), что приводит к уменьшению эмитанса пучка. После пучок перенаправляется в линейный ускоритель и ускоряется до искомой энергии 8.9 ГэВ. Другая половина электронных сгустков ускоряется до 30 ГэВ и направляется на вольфрамовую мишень для генерации позитронов, которые затем возвращаются к началу линейного ускорителя. Подобно электронам, они предварительно ускоряются и демпфируются в отдельном кольце для охлаждения и сброса энергии. Наконец, позитроны ускоряются в линейном ускорителе до энергии 3.1 ГэВ. После достижения своих номинальных энергий, электронные и позитронные пучки инжектируются из линейного ускорителя в накопительные кольца РЕР-II, где они фокусируются магнитной системой, а потери на синхротронное излучение компенсируются ВЧ. *BABAR* детектор расположен в точке пересечения электронного и позитронного пучков.

Сбор данных на детекторе начался в октябре 1999 года и закончился в апреле 2008 года. Интегральная светимость составила 454.4 фб^{-1} и набиралась в течении 6 продолжительных заходов (Runs) в пике и в непосредственной близости от резонанса $Y(4S)$ (см. таблицу 2). Кроме того, данные набирались в районе резонансов $Y(2S)$ и $Y(3S)$. Так, что суммарная интегральная светимость *BABAR* составляет 553.48 фб^{-1} .

Из-за разницы энергий между электронным и позитронным пучками, центр масс e^+e^- системы имеет лоренцевский сдвиг с $\beta\gamma \sim 0.56$. Это делает возможным реконструкцию вершин распадов B -мезонов, рождающихся почти покоящимися в ц.м.. Проектная светимость РЕР-II составляла $3 \times 10^{33} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$. Однако в течение эксперимента пиковая светимость превысила проектную и составляла около $12 \times 10^{33} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$.

Одной из основных физических задач исследований с детектором *BABAR* является измерение параметров матрицы смешивания кварков S_{CKM} . Некоторые из этих параметров могут быть определены путем измерения CP-асимметрии в распадах B -мезонов. Самый чистый тест CP-нарушения в B -мезонной системе в рамках Стандартной Модели состоит в изучении времени зависимого CP-нарушения в канале $B \rightarrow J/\psi K_S^0$ и \bar{B}^0 распадаются в одно и

Run	on-peak [fb^{-1}]	off-peak [fb^{-1}]
1	20.4	2.6
2	61.1	6.9
3	32.3	2.5
4	100.3	10.1
5	132.9	14.5
6	66.1	4.6

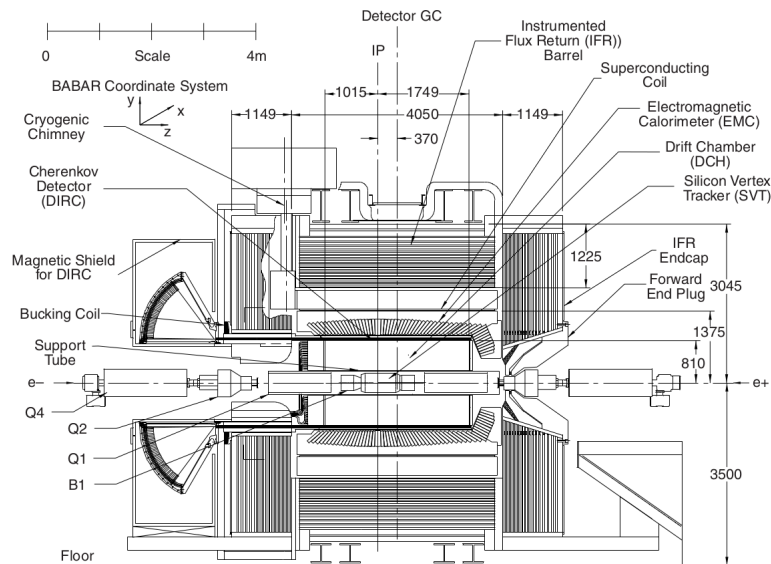
Таблица 2. Объем набранной светимости в разные периоды эксперимента.

то же конечное состояние с разной временной зависимостью. В исследованиях редких каналов распада B -мезонов выполняются поиски физики за пределами Стандартной Модели. Кроме реакций с c -кварками в конечном состоянии в эксперименте *BABAR* также высоковероятны реакции с очарованными кварками и τ -лептонами, так как сечения $\sigma(e^+e^- \rightarrow c\bar{c})$ и $\sigma(e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-)$ – одного порядка величины с $\sigma(e^+e^- \rightarrow b\bar{b})$. Так, с детектором *BABAR* было доказано смешивание $D^0 - \bar{D}^0$ мезонов. В тау-лептонном спектре были выполнены тесты лептонной универсальности, поиски нарушения лептонного числа, измерение $|V_{us}|$. Также проводимые ISR (initial state radiation) исследования сосредоточены на измерениях сечений электрон-позитронной аннигиляции в адронные конечные состояния и спектроскопию мезонов. Различные новые резонансы, такие как $Y(4260)$, были открыты с помощью процессов с излучением ISR фотона.

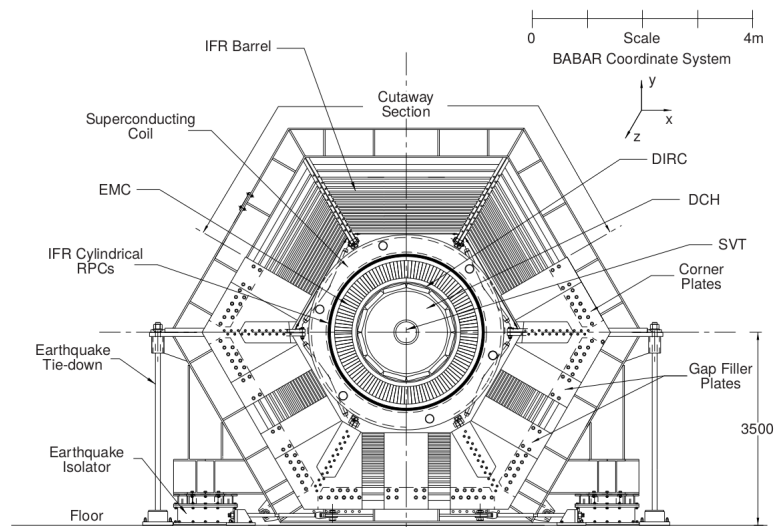
1.2 Детектор *BABAR*

Асимметрия в энергии пучков РЕР-II отразилась на конструкции детектора *BABAR*. Устройство детектора описано во многих статьях, например, в [76]. В 2008 году эксперимент с детектором был закончен и детектор в последующие годы был разобран, однако последующее повествование будет производиться в настоящем времени.

На рисунке 1.2 показано продольное и поперечное сечения детектора *BABAR*. Электронный пучок движется слева от детектора до момента встречи



(a)



(б)

Рис. 1.2 — Поперечное сечение детектора *BABAR* в продольном (а) и поперечном (б) направлениях. Основными компонентами являются кремниевая вершинная система, дрейфовая камера, черенковский детектор, электромагнитный калориметр и ярмо магнитного возврата. Указаны место встречи пучков (IP) и геометрический центр детектора (GC). Квадрупольные и дипольные магниты обозначены как Q1/2/4 и B1, соответственно [76].

с противоположно направленным позитронным пучком. Геометрический центр детектора (GC) смещен относительно точки взаимодействия (IP) на 37 см в направлении высокоэнергетического электронного пучка, чтобы максимизировать геометрическую эффективность регистрации продуктов распада бусонированных B -мезонов.

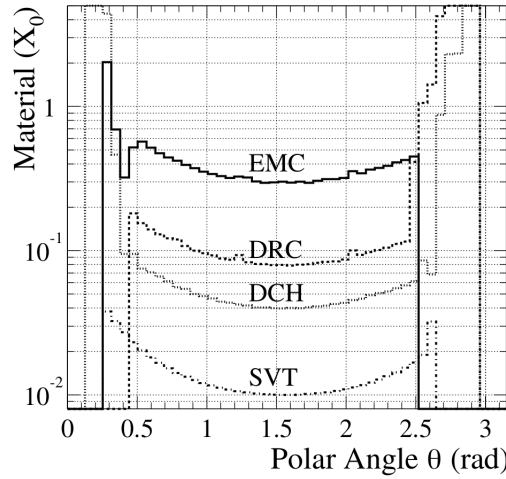


Рис. 1.3 — Количество радиационных длин в детекторе до попадания частицы в подсистему в зависимости от полярного угла [76].

Треки заряженных частиц детектируются с помощью пятислойной двухсторонней вершинной системы (SVT) и 40-слойной дрейфовой камеры (DCH). Обе системы находятся внутри сверхпроводящего соленоидального магнита с магнитным полем 1.5 Т. При реконструкции событий предполагается, что фотоны испущены из вершины пересечения треков заряженных частиц. Энергии и координаты фотонов регистрируются с помощью электромагнитного калориметра (EMC) на основе кристаллов CsI(Tl). Идентификация заряженных частиц (PID) основана на измерении ионизационных потерь (dE/dx) в SVT и DCH, на детектировании Черенковского излучения в системе DIRC, на основе данных по энерговыделению в калориметре EMC. Кроме того, идентификация мюонов во многом базируется на установлении трека в мюонной системе, помещенной внутри железного ядра, замыкающего магнитный поток. Для подавления эффектов многократного рассеяния треков и расщепления фотонов материал во внутренней области детектора минимизирован. На рисунке 1.3 показано количество материала в детекторе в радиационных длинах, которое пересекает частица до проникновения в систему. Видно, что фотон, перпендикулярный оси пучков, пересекает около $0.3 X_0$, прежде чем попасть в калориметр.

Кремниевый вершинный детектор (SVT) предназначен, в первую очередь, для реконструкции вершин распада частиц, а также ионизационных потерь треков. SVT состоит из пяти цилиндрических слоев двухсторонних кремниевых микрополосковых (микростриповых) датчиков. Стрипы на внешней стороне каждого слоя параллельны направлению Z, что позволяет точно определять

азимутальных угол трека. Внутренние стрипы перпендикулярны внешним и, таким образом, позволяют измерять η -координату. Полярный угловой диапазон, охватываемый SVT, составляет $20\text{--}150^\circ$ в лабораторной системе отсчета, что соответствует примерно 90% телесного угла в с.с.м.. SVT монтирована в непосредственной близости от бериллиевой вакуумной трубы. Суммарное пространственное разрешение реконструкции вершин составляет лучше чем 100 мкм.

Основное назначение многопроволочной дрейфовой камеры (DCH) - точное измерение поперечного импульса треков на основе определения их кривизны в магнитном поле 1.5 Тл. Кроме того, измерение ионизационных потерь в камере (dE/dx) требуется для идентификации различных типов частиц. Десять суперслоев состоят из четырех слоев каждый. Всего 7104 гексагональных дрейфовых ячеек в 40 слоях. Каждая ячейка образована шестью полевыми алюминиевыми проволочками (катода), диаметром 120 мкм и покрытыми тонким слоем золота. В центре ячейки сигнальная проволочка (анодная) диаметром 10 мкм из смеси вольфрам-рений, также позолоченная. Суммарное поперечное разрешение камеры составляет:

$$\frac{\sigma_{pt}}{pt} = (0.13 \pm 0.01) \cdot \frac{pt}{GeV/c} \oplus (0.45 \pm 0.03)\% \quad (1.1)$$

Разрешение в измерении dE/dx в DCH составляет около 7% [76], что позволяет производить разделение пионов и каонов вплоть до $p_{Lab} \sim 700$ МэВ, как видно из рисунка 1.4 (слева).

Черенковский детектор используется для идентификации различных типов частиц. В частности, он позволяет производить разделение K и π при импульсах $p_{Lab} > 700$ МэВ. На детектор вокруг DCH установлено 144 черенковских радиатора параллелепипедной формы с шириной 35 мм, толщиной 17 мм и длиной 4.9 м. Радиаторы сделаны из кварца с показателем преломления $n = 1.473$ и объединены в 12 кластеров так, что каждый кластер образует ребро правильного многогранника. Заряженная частица, пролетающая сквозь радиатор со скоростью $\beta = v/c \geq 1/n$, излучает черенковский свет в область около угла:

$$\cos(\theta_C) = \frac{1}{n\beta} \quad (1.2)$$

Испускаемый свет, испытав внутренние поверхностные отражения, проникает в область с очищенной водой, где распространяется около 1.2 метра до фотоэлектронных умножителей. Измерение черенковского угла частицы позволяет

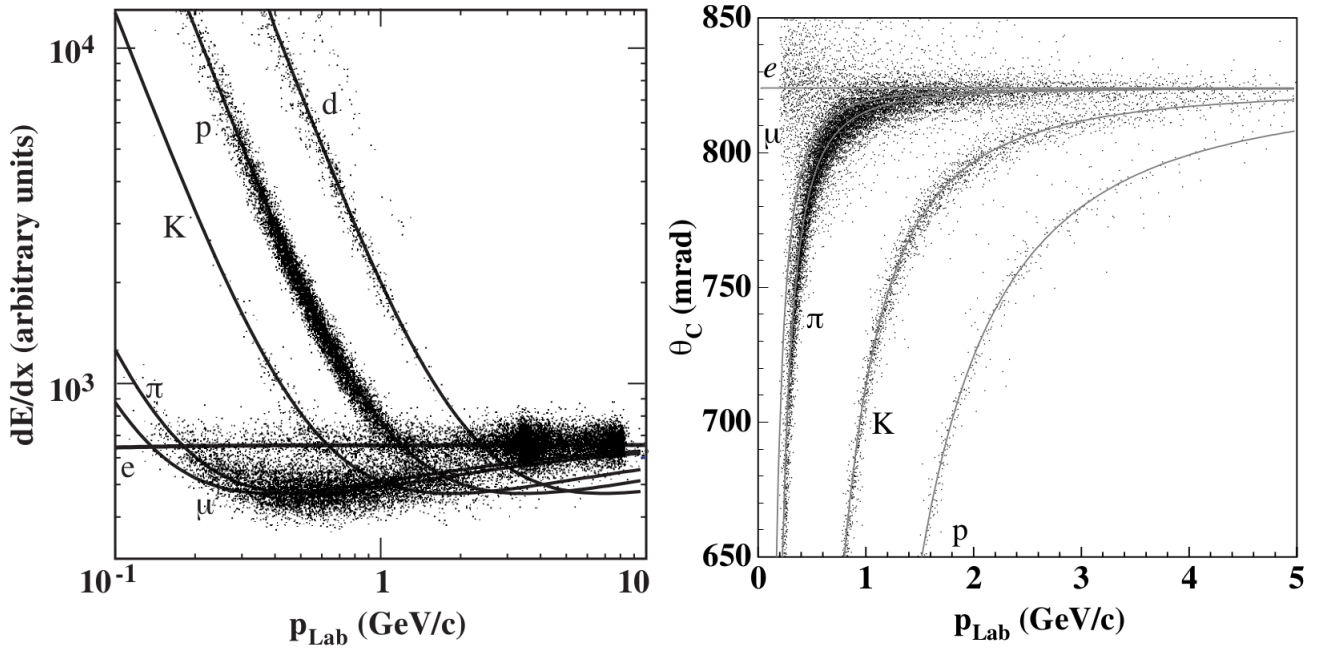


Рис. 1.4 — Удельные ионизационные потери (dE/dx) в DCH как функция импульса для разных типов заряженных частиц. Кривые изображают предсказания согласно формуле Бете-Блоха. Изображение взято из [27]. Справа: измеренный черенковский угол как функция импульс (p_{Lab}) для разных типов частиц. Изображение взято из [28].

определить ее скорость согласно [2], что в совокупности с измерением импульса в SVT и DCH определяет массу частицы.

Электромагнитный калориметр (ЕМС) был разработан для измерения с высокой эффективностью энергии, формы и положения электромагнитных ливней в диапазоне энергий от 20 МэВ до 9 ГэВ. Кроме того, он также используется для измерения энергосодержания мюонов и адронов. ЕМС состоит из мелко сегментированного массива 6580 кристаллов йодида цезия ($CsI(Tl)$), легированного таллием. Материал имеет короткую радиационную длину $X_0 \approx 1.85$ см, а также небольшой радиус Мольера, описывающий масштаб поперечного расширения электромагнитного ливня, что позволяет достичь хорошего углового разрешения. ЕМС имеет цилиндрическую форму с внутренним радиусом 92 см и внешним 136 см, длиной 3 м. Торцевая часть калориметра расположена в направлении движения электронного пучка. Угловой диапазон, покрываемый калориметром составляет от 16° до 142° в лабораторной системе. Длина кристаллов варьируется от 29.8 см ($16.1 X_0$) при больших углах и 32.6 см ($17.6 X_0$) при малых углах в торцевой части. Два кремниевых фотодиода, установ-

ленные на задней стороне каждого кристалла, считывают сцинтилляционный свет. ЕМС обеспечивает хорошее энергетическое и угловое разрешение, которое может быть эмпирически параметризовано как [76, 29]:

$$\frac{\sigma_E}{E} = \frac{(2.32 \pm 0.30)}{(E/GeV)^{0.25}} \oplus (1.85 \pm 0.12)\% \quad (1.3)$$

$$\sigma_\theta \approx \sigma_\phi = \frac{(4.16 \pm 0.04)}{\sqrt{E/GeV}} \oplus (0.00 \pm 0.04) \text{ mrad}. \quad (1.4)$$

Железное ярмо (IFR - instrumented flux return) вокруг соленоидального магнита имеет два основных предназначения. Во-первых, ярмо замыкает магнитный поток сверхпроводящей катушки (1.5 Т). Во-вторых, ярмо используется как калориметр для идентификации мюонов и нейтральных адронов. IFR состоит из цилиндрической (19 слоев) и торцевой (18 слоев) частей. В течение первого захода (RUN1) внутри каждого слоя были установлены газовые резистивные плоско-параллельные камеры (RPCs - resistive plate chambers), которые затем сменились стримерными трубками (LSTs - limited streamer tubes).

Триггеры и фоновые фильтры событий являются важными частями системы сбора данных с детектора *BABAR*. Триггер состоит из двух частей: триггер 1-го уровня (L1) аппаратный, триггер 3-го уровня (L3) программный. Система триггеров L1 содержит четыре подсистемы: триггер заряженных частиц (DCT), триггер нейтральных частиц (EMT), триггер космических частиц (IFT) и триггер глобального уровня (GLT). DCT и EMT получают информацию от подсистем DCH и ЕМС. Эта информация обрабатывается и передается в GLT, который сопоставляет угловую информацию кластеров и треков. GLT также использует информацию с IFT для независимого запуска космических событий. Сигналы L1 передаются в систему быстрого управления и синхронизации (FCTS). Частота срабатывания триггера L1 при светимости $L=8 \cdot 10^{33} \text{ см}^{-2}\text{с}^{-1}$ составляет около 2.5 кГц. Триггер L3 обеспечивает дальнейшую фильтрацию фоновых событий на основе более подробной информации с DCH и ЕМС, а также отбирает события для калибровки детектора и онлайн-мониторинга.

Глава 2. Изучение процесса $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$

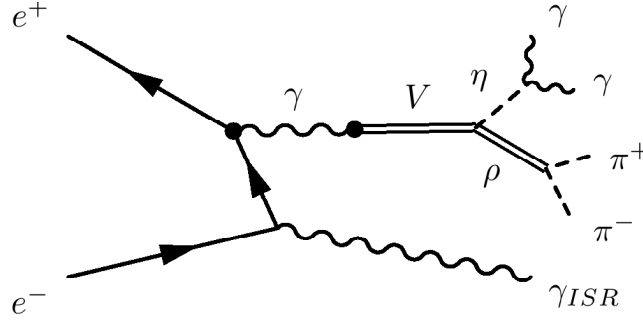


Рис. 2.1 — Феймановская диаграмма процесса $e^+e^- \rightarrow \eta\pi^-\pi^+(\gamma)$

Эта глава посвящена изучению процесса $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta(\gamma)$ (рисунок 2.1), где фотон испущен начальным состоянием e^+e^- (ISR – initial state radiation), и η -мезон испытывает распад на два фотона ($B_{\eta \rightarrow 2\gamma} = 39.31 \pm 0.20\%$). Различные энергии ISR фотона позволяют измерять сечение искомой реакции одновременно в большом диапазоне значений инвариантной массы адронной системы¹. Всего было отобрано около 8000 реконструированных сигнальных событий на основе полной набранной с детектором *BABAR* светимости.

Промежуточный фотон в данной реакции необходим, так как адронная система может возникнуть из лептонной пары либо посредством электромагнитного взаимодействия, либо слабого. Однако вклад последнего сильно подавлен, как минимум, фактором s^2/M_Z^4 , где M_Z – масса Z-бозона. Ввиду того, что $E_{c.m.}$ в данном исследовании составляет менее 3.5 ГэВ, рождение адронной системы происходит посредством резонансов V с квантовыми числами фотона $J^{PC} = 1^{--}$. В рамках точного сохранения G-четности пара пионов рождается путем векторного ρ -подобного резонанса, главным образом $\rho(770)$. В свою очередь $\rho(770)$ и псевдоскалярный η -мезон рождаются в 1^{--} состоянии.

¹Везде ниже, где речь идет о процесса $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta(\gamma)$, подразумевается обозначение $E_{c.m.} = \sqrt{s} = m_{2\pi\eta}$

2.1 Методика ISR

Анализ процесса $e^+e^- \rightarrow \gamma + \text{адроны}$ с высокоэнергетичным ISR фотоном позволяет эффективно уменьшить инвариантную массу начальной электрон-позитронной пары и изучить процесс рождения адронов в широком диапазоне энергий в одном эксперименте. Возможность использования ISR на B-фабриках была подробно изучена во многих статьях, например, здесь [18]. Процесс испускания фотона описывается так называемой функцией-радиатор $W(s, x, \theta)$, которая рассчитывается в рамках квантовой электродинамики с точностью 0.5% и определяет связь между значениями борновского и видимого сечений:

$$\frac{d\sigma_{e^+e^- \rightarrow \eta\pi^-\pi^+(\gamma)}(x, \theta)}{dx d\cos\theta} = W(s, x, \theta) \cdot \sigma_{e^+e^- \rightarrow \eta\pi^-\pi^+}(\sqrt{s(1-x)}), \quad (2.1)$$

где $x = \frac{2E_\gamma}{\sqrt{s}} \approx 10.58 \text{ ГэВ}$ и θ — полярный угол и энергия ISR фотона в с.ц.м.. С ростом энергии функция $W(s, x, \theta)$ быстро уменьшается, однако имеет длинный "хвост", который "усиливается" растущим $\sqrt{s(1-x)}$, что приводит к достаточно большому значению сечения в области $\sqrt{s}_{\text{м.}} = 0.3 \div 5 \text{ ГэВ}$. Видимое сечение в левой части выражения (2.1) извлекается из эксперимента, как отношение числа ISR событий к интегральной светимости, что позволяет определить искомое борновское сечение в правой части.

Распределение по полярному углу ISR фотона имеет острые пики в направлениях начальных электрона и позитрона, однако около 15% фотонов летят в область калориметра детектора и могут быть задетектированы.

2.2 Экспериментальные и моделированные данные

Использованные для анализа события Монте-Карло моделирования (MC) представлены в Таблице 3. Все события MC были обработаны той же версией реконструкции (24th release), что и экспериментальные данные. Третья колонка в таблице соответствует видимому сечению процесса $e^+e^- \rightarrow X\gamma$ с ISR фотоном, испущенным на большой угол в область калориметра. Данные значения сечений используются для нормировки вкладов фоновых процессов и посчитаны

процесс	N_{gen}	σ , pb
$2\pi\eta(\gamma)$	855973	$0.172 \pm 0.015_{stat}$
$\pi^+\pi^-2\pi^0(\gamma)$	4279929	4.2 ± 0.5
$3\pi\eta(\gamma)$	426993	0.20 ± 0.02
$K^+K^-\eta(\gamma)$	426992	0.08 ± 0.01
$3\pi(\gamma)$	899996	2.6 ± 0.5
$\pi^+\pi^-(\gamma)$	1844824	21.4
$\omega 2\pi^0(\gamma)$	672357	
$K^+K^-(\gamma)$	1332161	
$K^+K^-\pi^0(\gamma)$	1310662	
$q\bar{q}$	1282347	2090
2τ	10104949	890

Таблица 3 — Количество моделированных событий, использованных в анализе процесса $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$

как:

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow X(\gamma)} = \int \int_{\cos(20^\circ)}^{\cos(160^\circ)} W(s, x, \theta_\gamma) \sigma_{e^+e^- \rightarrow X}(\sqrt{s(1-x)}) d\cos(\theta_\gamma) dx \quad (2.2)$$

Симуляция ISR процессов осуществлялась с помощью генератора AfkQed [30]. Для вычисления поправок, учитывающих излучение, дополнительное к ISR фотону (NLO), использовался метод структурных функций [31]. В этом подходе один или два дополнительных фотона генерировались в направлении начальных электрона и позитрона. Учет излучения из конечного состояния производился с помощью пакета PHOTOS [32]. Фотон в каждом генерированном событии летит на большой угол в с.ц.м.: $20^\circ < \theta < 160^\circ$. Кроме того требуется, чтобы инвариантная масса адронной системы и ISR фотона была больше $8 \text{ ГэВ}/c^2$. Последнее требование подавляет рождение событий с высокоэнергетическими NLO поправками, что приводит к тому, что радиационная поправка к сечению изучаемого процесса близка к единице.

События фоновых процессов $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ ($q = u, d, s$ кварки) были сгенерированы с помощью пакета JETSET, а события $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$ с помощью KORALB [35]. События ISR процессов были выключены в генераторе JETSET, так как в генераторе некорректно воспроизводятся низкоэнергетичные адрон-

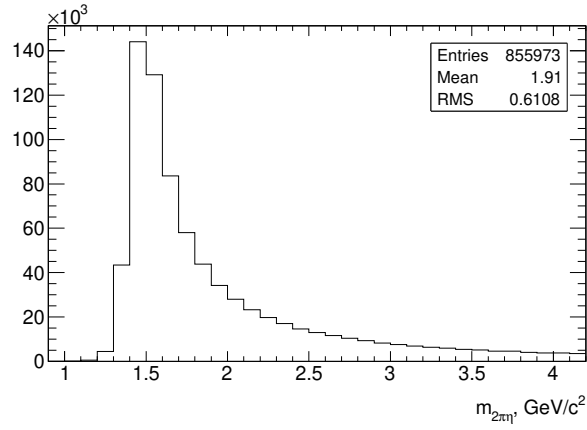


Рис. 2.2 — Сгенерированный спектр инвариантных масс $m_{2\pi\eta}$ изучаемого процесса.

ные спектры. MC моделирование учитывает особенности состояния детектора и коллайдера при проведении эксперимента.

События сигнального процесса $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta(\gamma)$ были моделированы в предположении промежуточного перехода $\rho(1450) \rightarrow \rho(770)\eta \rightarrow 2\pi\eta$. Генерированный спектр инвариантных масс $m_{2\pi\eta}$ показан на рисунке 2.2. Отклик на каждое MC событие получено с помощью описания детектора в рамках пакета GEANT4 [43]. Главными фоновыми процессами типа ISR являются реакции e^+e^- аннигиляции в конечные состояния $2\pi^\pm 2\pi^0(\gamma)$, $2\pi^\pm \pi^0 \eta(\gamma)$, $K^+K^-\eta(\gamma)$. Видимые сечения данных реакций были посчитаны в соответствии с формулой (2.2) и представлены в таблице 2.2.

2.3 Отбор сигнальных событий

Первое условие отбора сигнальных событий состоит в требовании наличия реконструированного фотона с энергией выше 3 ГэВ в с.ц.м. и, как минимум, двух треков, а также двух дополнительных фотонов с инвариантной массой в диапазоне $[0.44 : 0.64]$ ГэВ/с² вблизи массы η -мезона. Энергия каждого фотона требуется больше 100 МэВ и полярный угол приходится в диапазоне $[0.3 \div 2.1]$ радиан. Сравнение моделированных и экспериментальных спектров минимальной энергии кандидатов в фотоны из распада η -мезона показано на рисунке 2.3. Фон, связанный с фотонами малых энергий, в значительной степени связан с

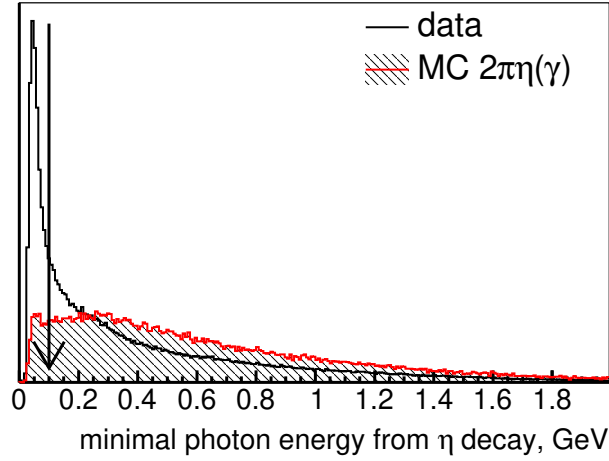


Рис. 2.3 — Сравнение спектров энергий кандидатов в фотоны из распада η -мезона, где выбран фотон с меньшей энергией в с.ц.м.. Открытая гистограмма соответствует эксперименту, заштрихованная - моделированному сигналу. Стрелка демонстрирует примененное условие отбора.

процессом $e^+e^- \rightarrow 2\pi^\pm 2\pi^0(\gamma)$. Стрелка на данном рисунке демонстрирует применённое условие отбора. Если в событии реконструировано несколько фотонов, ISR фотоном предполагается тот, который обладает наибольшей энергией. Большинство событий характеризуется наличием дополнительных мягких фотонов ввиду машинного фона и/или взаимодействия с веществом детектора и/или FSR и/или NLO ISR.

Нужно отметить, что геометрическая эффективность реконструкции искомого конечного состояния $2\pi\eta(\rightarrow 2\gamma)(\gamma)$, определенная на генераторном уровне, равна $\epsilon_{reg}^{geom}(0.3 < \theta_\gamma < 2.3, \text{ } < \theta_\pi < 2.4) \cdot B_{\eta \rightarrow 2\gamma} \approx 18\%$. Однако полная эффективность, как будет ясно ниже, значительно меньше, ввиду применения дополнительных условий отбора для подавления фона.

Требуется, чтобы реконструированные треки экстраполировались вблизи номинальной точки взаимодействия, а именно, в область 3 см в Z-направлении и 0.25 см в поперечной к пучкам плоскости. Вершина пересечения треков предполагается также точкой вылета фотонов, что позволяет более корректно определять их направление. Требуется, чтобы два отобранных кандидата в сигнальные треки не были одновременно идентифицированы как каоны или мюоны. В случае, если в событии реконструировано более двух треков выбирается та пара противоположно заряженных треков, которые наиболее близки к точке взаимодействия.

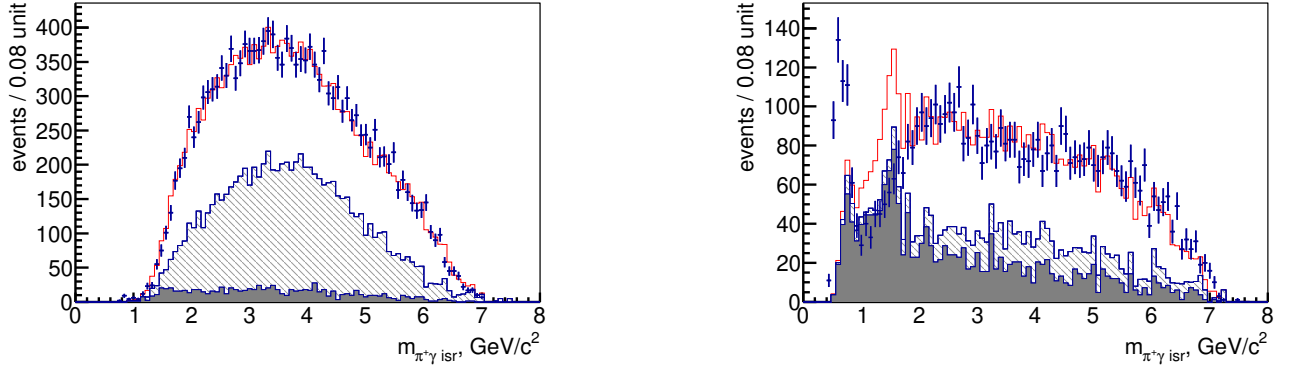


Рис. 2.4 — Инвариантная масса ISR фотона и заряженного пиона для событий из Области I (слева) и Области II (справа). Открытая гистограмма демонстрирует сумму моделированных сигнала и фона. Наклонно заштрихованная гистограмма соответствует фону типа ISR, закрашенная - фону типа non-ISR.

Отобранные кандидаты подвергаются кинематической реконструкции с четырьмя условиями, отражающими законы сохранения энергии-импульса:

$$P_{e^+} + P_{e^-} = P_{\pi^+} + P_{\pi^-} + P_{\gamma_1} + P_{\gamma_2} + P_{\gamma_{ISR}}$$

В каждом событии выбирается комбинация кандидатов, отвечающая минимальному значению χ^2_{4C} . Структура и уровень фона значительно зависят от массы системы $\pi^+\pi^-\eta$, поэтому обозначим для последующего анализа две Области: $1.15 < m_{\pi^+\pi^-\eta} < 2.0$ ГэВ/с² (I) and $2.0 < m_{\pi^+\pi^-\eta} < 3.5$ ГэВ/с² (II). Для отбора сигнальных событий в Области I требуется условие $\chi^2_{4C} < 25$, в то время как на события из Области II накладывается более жесткое условие $\chi^2_{4C} < 15$.

Для событий из Области II используются дополнительные условия отбора сигнальных событий. Так, инвариантная масса ISR фотона и заряженного пиона $m_{\pi^\pm \gamma_{ISR}}$ должна быть больше 1 ГэВ/с² (см. рисунок 2.4). Из рисунка видно, что в Области I доминирует фон типа ISR, в то время как в Области II - фон типа non-ISR (то есть без ISR фотона). Из рисунка видно, что non-ISR фон некорректно моделируется в области $m_{\pi^\pm \gamma_{ISR}} < 2$ ГэВ/с², поэтому нормировка этого фона будет отдельно обсуждаться ниже. Также нужно отметить, что доминирующим источником non-ISR фона является процесс $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ согласно предсказанию моделирования.

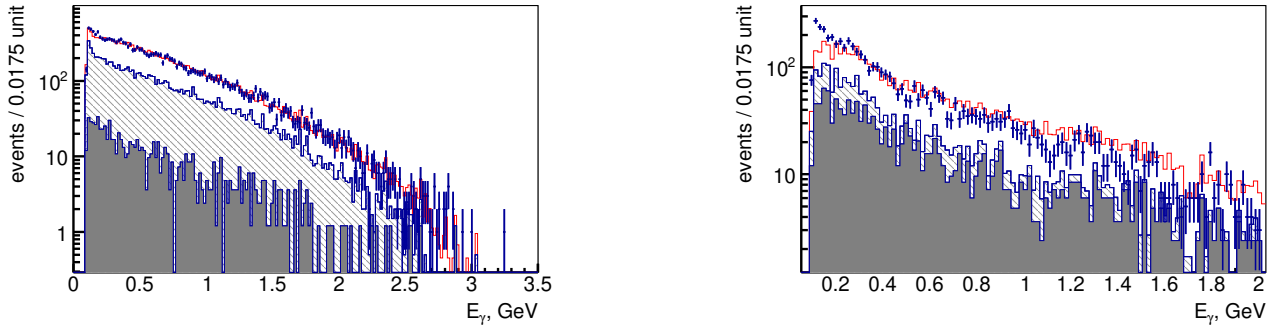


Рис. 2.5 — Энергетический спектр кандидатов в фотон γ из распада η -мезона для событий из Области I (слева) и Области II (справа). Открытая гистограмма демонстрирует сумму моделированных сигнала и фона. Наклонно заштрихованная гистограмма соответствует фону типа ISR, закрашенная - фону типа non-ISR.

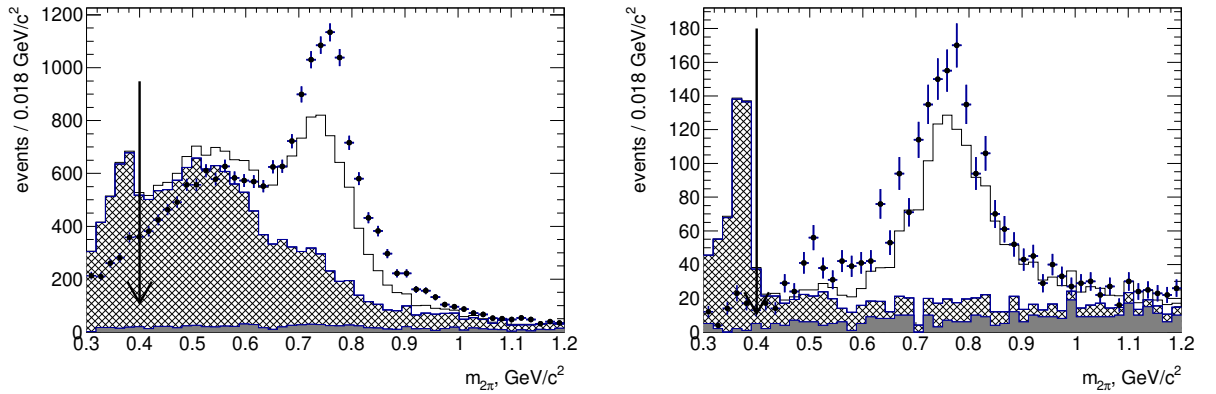


Рис. 2.6 — Инвариантная масса двух отобранных пионов $m_{2\pi}$ для событий из Области I (слева) и Области II (справа). Открытая гистограмма демонстрирует сумму моделированных сигнала и фона. Наклонно заштрихованная гистограмма соответствует фону типа ISR, закрашенная - фону типа non-ISR.

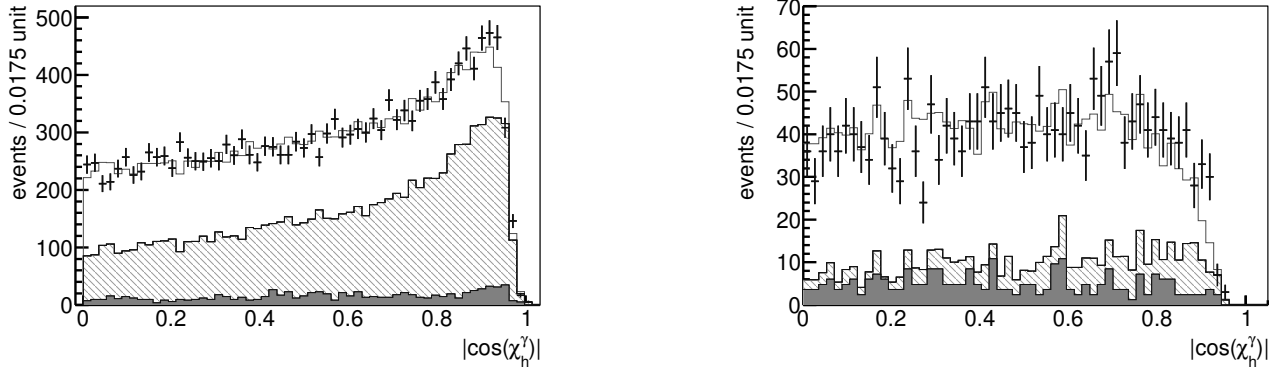


Рис. 2.7 — Распределение по модулю косинуса угла между импульсом фотона в системе покоя η -мезона и импульсом η -мезона в лабораторной системе для событий из Области I (слева) и Области II (справа). Открытая гистограмма демонстрирует сумму моделированных сигнала и фона. Наклонно заштрихованная гистограмма соответствует фону типа ISR, закрашенная - фону типа non-ISR.

Энергетический спектр кандидатов в фотоны из распада η -мезона показан на рисунке 2.5. Для событий из Области II требуется, чтобы энергия каждого такого фотона была больше 0.2 ГэВ.

Инвариантная масса двух отобранных пионов $m_{2\pi}$ показана на рисунке 2.6 для Области I (слева) и Области II (справа). Видно, что моделирование не воспроизводит корректно экспериментальный спектр. Для дальнейшего анализа требуется, чтобы $m_{2\pi}$ было больше 0.4 ГэВ/ c^2 , как показано стрелками на рисунке. Согласно моделированию $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$, данное условие отбора снижает эффективность регистрации на 0.6%. Распределение по модулю косинуса угла между импульсом фотона в системе покоя η -мезона и импульсом η -мезона в лабораторной системе показано на рисунке 2.7. Видно, что по данному параметру нельзя сделать эффективный отбор сигнальных событий.

Распределение по χ_{4C}^2 для Области I и Области II показано на рисунке 2.8. Ошибки точками соответствуют экспериментальным данным, в то время как гистограмма отображает совокупно моделированные вклады фона типа non-ISR (наклонно заштрихованная гистограмма), фона типа ISR (закрашенная гистограмма), и сигнальных событий (открытая гистограмма). Суммарная моделированная гистограмма нормирована на первые семь бинов экспериментального спектра. Видно, что в Области II при больших значениях χ_{4C}^2 моделирование недооценивает уровень событий, однако при малых значениях χ_{4C}^2 относительно

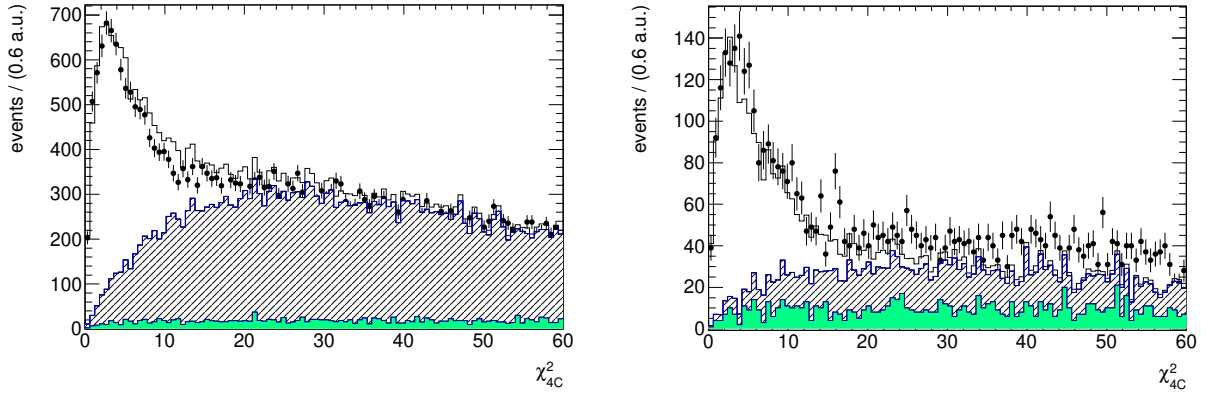


Рис. 2.8 — Спектр χ^2_{4C} для событий в Области I (слева) и для событий в Области II (справа). Открытая гистограмма демонстрирует сумму моделированных сигнала и фона. Наклонно заштрихованная гистограмма соответствует фону типа ISR, закрашенная - фону типа non-ISR.

хорошо описывает экспериментальный спектр. Необходимо также напомнить, что для отбора событий в Области I требуется $\chi^2_{4C} < 25$, в Области II — $\chi^2_{4C} < 15$.

Уровень фона после примененных условий продолжает быть высоким, в связи с чем были применены дополнительные условия отбора. Доминирующим источником фона является процесс $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\gamma_{ISR}$, отличительной особенностью которого является наличие в событии нейтральных пионов. Для идентификации данного фоновых процесса производится поиск пары фотонов (энергия каждого больше 100 МэВ) с инвариантной массой, наиболее близкой к m_{π^0} . Распределение по данному параметру ($m_{2\gamma}^{\pi^0}$) показано на рисунке 2.9. Пик в области массы π^0 -мезона обусловлен, в основном, вкладом шумных фотонов, несколько штук которых содержится примерно в каждом втором событии. Для Областей I и II требуется, чтобы $m_{2\gamma}^{\pi^0} > 0.16$ ГэВ/с². Для дальнейшего описания назовем данное требование как "золотой отбор". Распределение по $m_{2\gamma}^{\pi^0}$ для моделированных сигнальных событий показано на рисунке 2.1. Примененный отбор, показанный стрелкой, уменьшает эффективность реконструкции на 13% и 8% в Области I и II, соответственно.

В результате отборов выше было отобрано 11469 экспериментальных событий. Распределение по инвариантной массе кандидатов в η -мезон показано на рисунке 2.11. Точки с ошибками демонстрируют экспериментальный спектр, открытая гистограмма показывает моделированные сигнальные события. Вклад моделированного фона показан закрашенной и заштрихованной гистограмма-

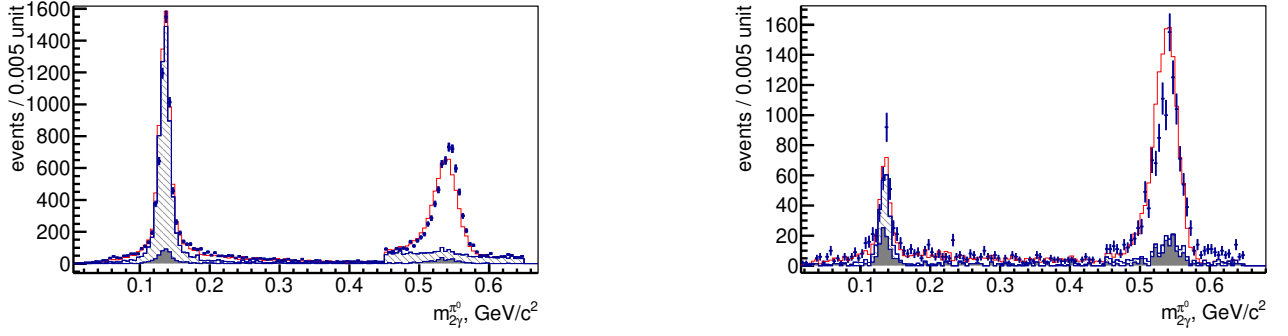


Рис. 2.9 — Распределение по параметру $m_{2\gamma}^{\pi^0}$ (описание см. в тексте) для событий в Области I (слева) и для событий в Области II (справа). Открытая гистограмма демонстрирует сумму моделированных сигнала и фона. Наклонно заштрихованная гистограмма соответствует фону типа ISR, закрашенная - фону типа non-ISR.

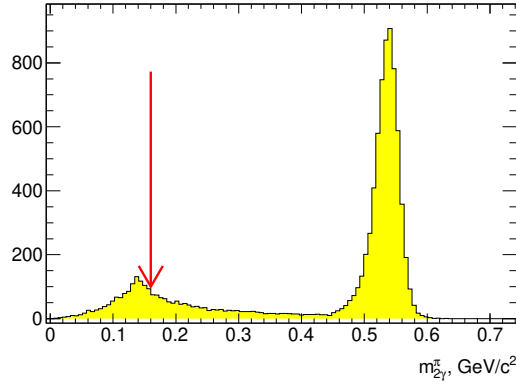


Рис. 2.10 — Распределение по параметру $m_{2\gamma}^{\pi^0}$ (см. описание в тексте) для моделированных сигнальных событий, прошедших все вышеуказанные условия отбора. Стрелка демонстрирует примененный "золотой отбор".

ми. Видно, что в Области II вклад фона по-прежнему недооценен и состоит, преимущественно, из событий $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$.

2.3.1 Нормировка фона $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$.

Генератор JETSET лишь с ограниченной точностью (10÷50%) воспроизводит процессы адронизации пары кварков $q\bar{q}$ в конкретное адронное состояние,

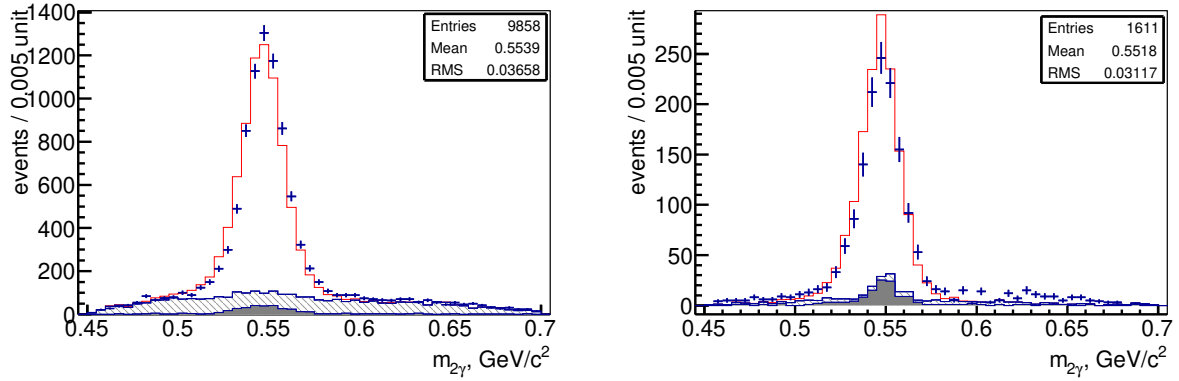


Рис. 2.11 — Двухфотонная инвариантная масса после кинематической 4С реконструкции для событий в Области I (слева) и для событий в Области II (справа). Открытая гистограмма демонстрирует сумму моделированных сигнала и фона. Наклонно заштрихованная гистограмма соответствует фону типа ISR, закрашенная - фону типа non-ISR.

что обуславливает необходимость дополнительной калибровки данного источника фона.

Источник фон $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ следует разделить на два вида: 1) $e^+e^- \rightarrow \pi^-\pi^+\pi^0\eta$ - события данного класса характеризуются пикованностью двухфотонной инвариантной массы в области $m_{\gamma\gamma}$ ("peaking"); 2) $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$, $\rho^+\rho^-\pi^0$, $\rho^+\rho^-\pi^0\pi^0$, $K^+K^-\pi^0$ и другие, где n - целое число. События второго типа распределены по $m_{\gamma\gamma}$ непикованным образом в области $m_{\gamma\gamma}$ ("non-peaking"). Причина того, что события $q\bar{q}$ идентифицируются как сигнальные, состоит в том, что фотон из распада высокоэнергетического π^0 имитирует ISR фотон.

Распределение на рисунке 2.12 демонстрирует распределение по инвариантной массе ISR фотона со всеми другими фотонами в событии. Спектр слева демонстрирует события моделирования $q\bar{q}$, в то время как справа показаны экспериментальные события. Для увеличения статистической точности в данных спектрах используются "мягкие отборы", то есть $\chi^2_{4C} < 100$ и не используется "золотой отбор". Пик от вклада π^0 -мезона отчетливо виден на данных спектрах, демонстрируя присутствие событий типа non-ISR. Спектры $m_{\gamma\gamma_{ISR}}$ были аппроксимированы суммой нормального распределения (гаусса) и полинома второй степени. Параметры гаусса при аппроксимации эксперимента фиксировались на значениях из аппроксимации моделирования. Нормировочный фактор к моделированию $q\bar{q}$ определяется как отношение числа событий под гауссом в эксперименте к значению в моделировании. На рисунке 2.13 показана

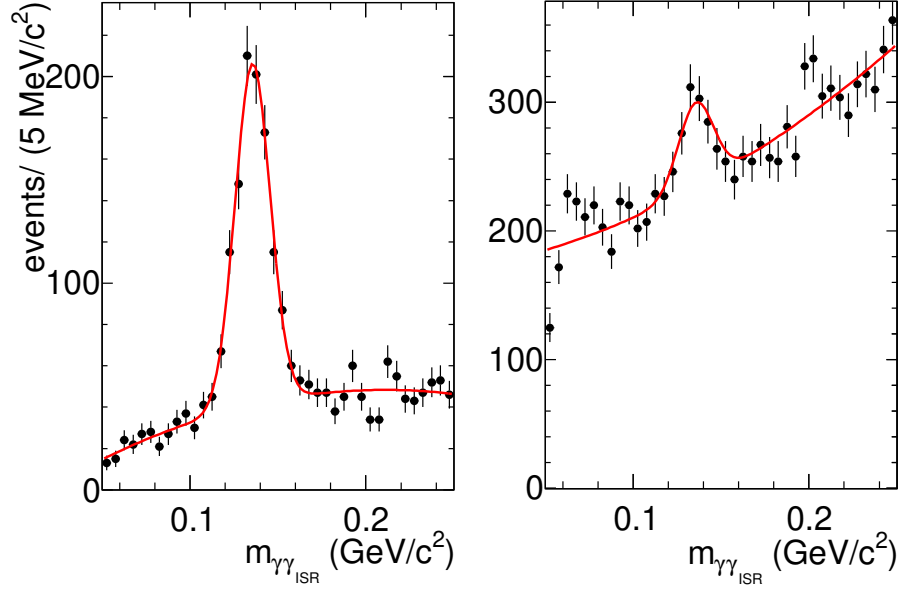


Рис. 2.12 — Распределение по инвариантной массе ISR фотона со всеми другими фотонами в событии для моделирования $q\bar{q}$ (слева) и экспериментальных событий (справа).

зависимость нормировочного фактора в зависимости от значения $m_{2\pi\eta}$. Представленное поведение позволяет предположить, что нормировка $e^- \rightarrow q\bar{q}$ не зависит от $m_{2\pi\eta}$ и равна 0.70 ± 0.05 .

Рисунок 2.14 (слева) демонстрирует уровень фона типа "peaking non-ISR" относительно полного уровня фона типа non-ISR согласно моделированию JETSET в случае "мягких отборов" (слева) и всех отборов (справа). Видно, что требование на χ^2_{4C} и "золотой отбор" приводит к тому, что фон от процесса $e^+e^- \rightarrow q\bar{q} \rightarrow \pi^-\pi^+\pi^0\eta$ является доминирующим среди фона типа non-ISR. Точки с ошибками на рисунке справа аппроксимированы полиномом ("peaking"), как показано красной линией. В итоге, спектр инвариантной массы $\pi^+\pi^-\eta$ для фоновых событий $e^+e^- \rightarrow q\bar{q} \rightarrow \pi^-\pi^+\pi^0\eta$ представлен на рисунке 2.15, в котором учтены оба фактора: нормировочный множитель ($= 0.70$) и $R(\text{"peaking"})$, описанные выше. Систематические ошибки, связанные с вычитанием фона будут обсуждены в Главе 2.4.

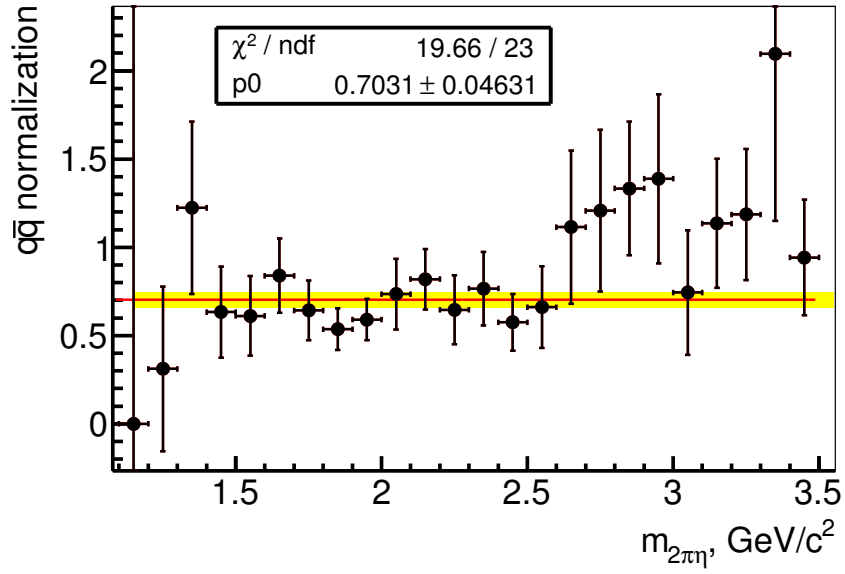


Рис. 2.13 — Нормировочный фактор к моделированию $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ в зависимости от $m_{2\pi\eta}$.

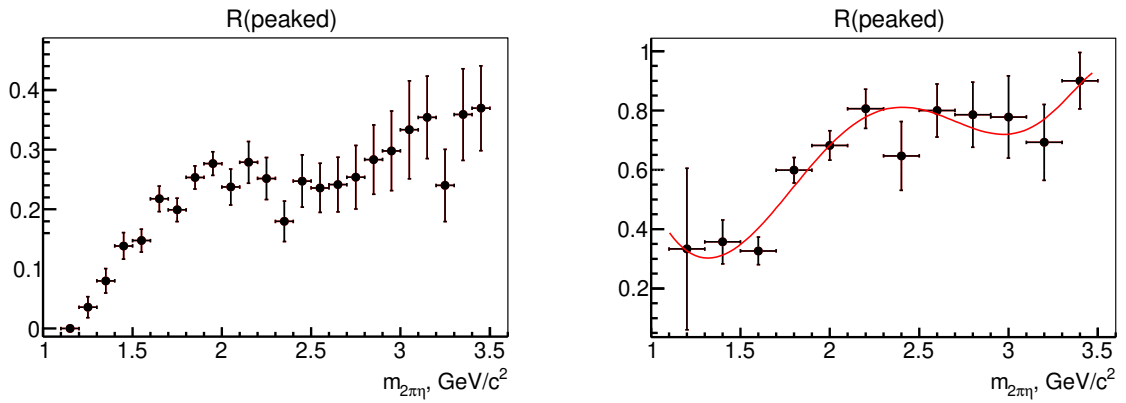


Рис. 2.14 — Уровень фона типа "peaking" non-ISR относительно полного уровня фона типа non-ISR согласно моделированию JETSET в случае "мягких отборов" (слева) и всех отборов (справа).

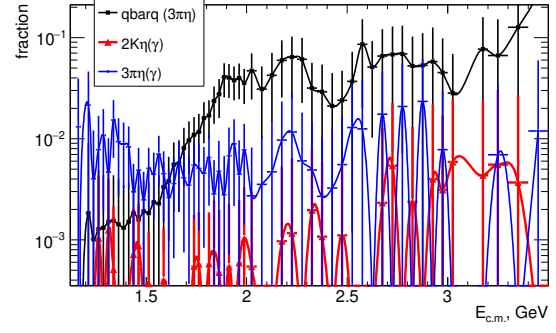
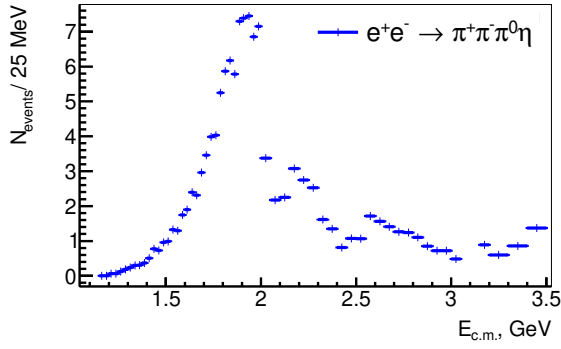


Рис. 2.15 — Спектр инвариантной массы $\pi^+\pi^-\eta$ для фоновых событий $e^+e^- \rightarrow q\bar{q} \rightarrow \pi^-\pi^+\pi^0\eta$.

Рис. 2.16 — Уровень пикованного фона (ISR и non-ISR) относительно полного числа кандидатов в сигнальные события.

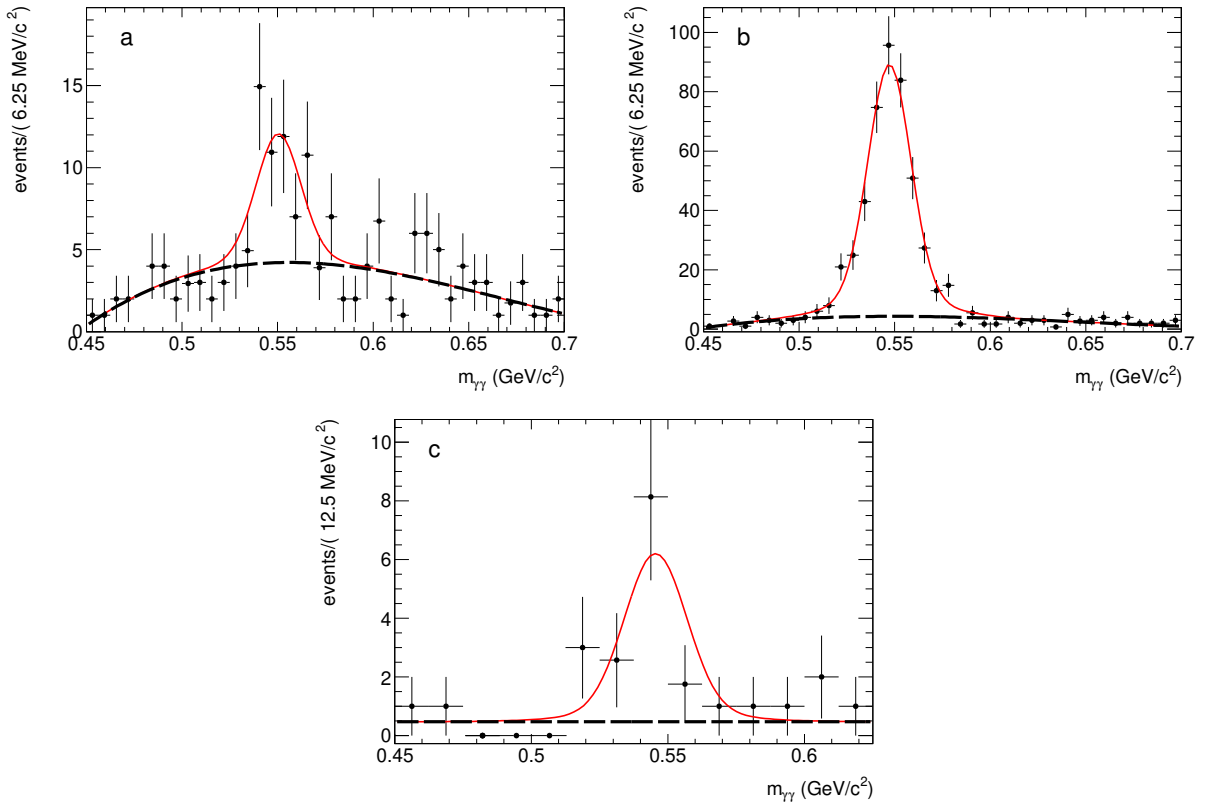


Рис. 2.17 — Аппроксимация двухфотонной инвариантной массы при $m_{\pi^+\pi^-\eta} = 1.3 \div 1.325$ ГэВ/ c^2 (а), $m_{\pi^+\pi^-\eta} = 1.5 \div 1.525$ ГэВ/ c^2 (б), и $m_{\pi^+\pi^-\eta} = 3.3 \div 3.4$ ГэВ/ c^2 (с). Пунктирная линия отражает распределение фона.

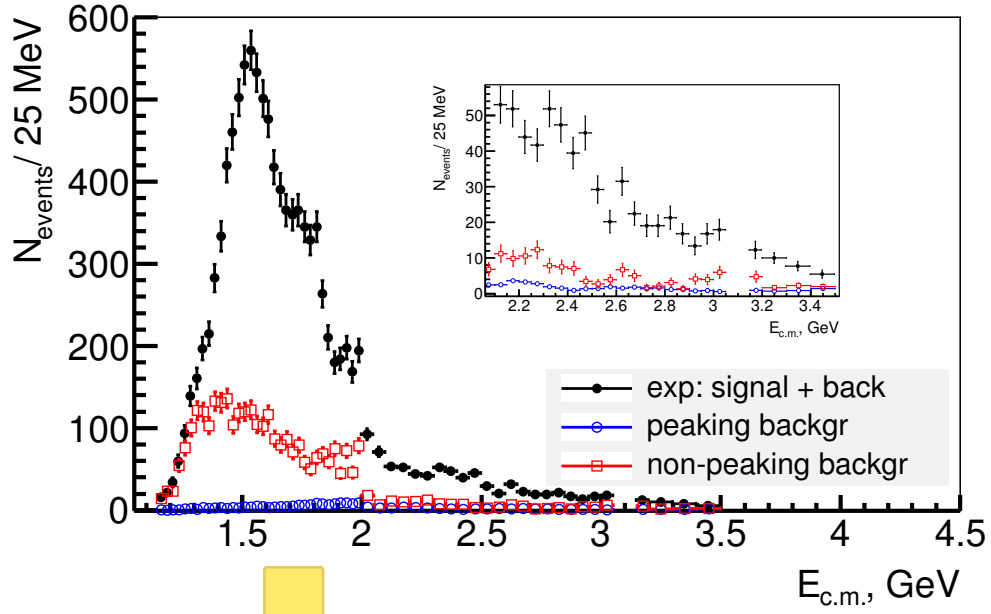


Рис. 2.18 — Распределение по инвариантной массе $m_{\pi^+\pi^-\eta}$ кандидатов в сигнальные события (круглые точки), уровень фона из фита $m_{\gamma\gamma}$ типа "non-peaking" (квадратики) и вклад фона типа "peaking" (открытые круги).

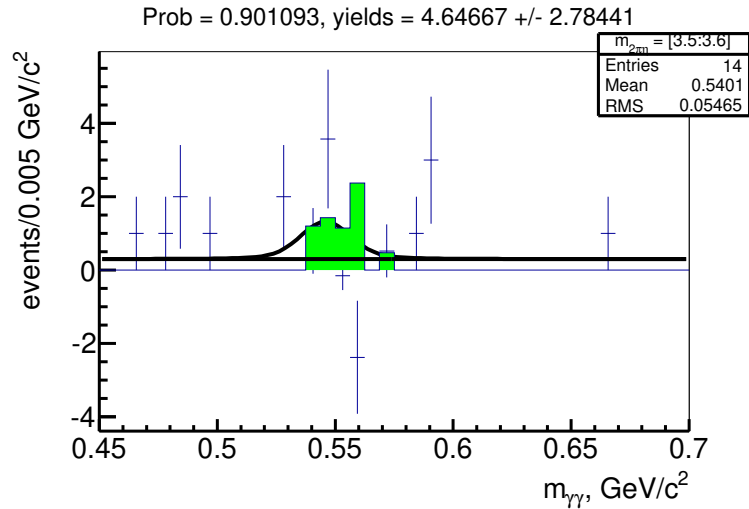


Рис. 2.19 — Спектр двухфотонной инвариантной массы при $3.5 < m_{2\pi\eta} < 3.6$ ГэВ/ c^2 после вычитания фона типа "peaking" который показан закрашенной гистограммой.

2.4 Вычитание фона

Спектр инвариантной массы системы $\pi^+\pi^-\eta$ разделен на интервалы (бины), ширина которых равна $25 \text{ МэВ}/c^2$ при $m_{\pi^+\pi^-\eta} < 2 \text{ ГэВ}/c^2$ и увеличивается до 50 (100) $\text{МэВ}/c^2$ при $2.0 < m_{\pi^+\pi^-\eta} < 3.1$ ($3.1 < m_{\pi^+\pi^-\eta} < 3.5$) $\text{ГэВ}/c^2$ ввиду уменьшения статистики сигнальных событий.

Пикованный фон ("peaking") разделен на три класса: 1) $e^+e^- \rightarrow q\bar{q} \rightarrow \pi^-\pi^+\pi^0\eta$ (см. рисунок 2.15); 2) $e^+e^- \rightarrow 2\pi^0\eta(\gamma)$; 3) $e^+e^- \rightarrow 2K\eta(\gamma)$. Относительная величина данных источников представлена на рисунке 2.16, откуда видно, что первый вид фона доминирует при $m_{\pi^+\pi^-\eta} < 3.5 \text{ ГэВ}/c^2$. Фоновые события типа "peaking" были вычтены из спектра массы двухфотонной инвариантной массы в каждом интервале $\pi^+\pi^-\eta$ в соответствии с их нормировкой, описанной выше.

После вычитания пикованного фона спектры двухфотонной инвариантной массы были аппроксимированы суммой сигнальных и фоновых профилей. Профиль сигнальных событий описывается суммой двух нормальных распределений, параметры которых были зафиксированы из Монте-Карло моделирования. Профиль фона в Области I фиксируется из моделирования ISR фона (главным образом, $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0(\gamma)$), и предполагается равномерным в Области II. Примеры аппроксимации показаны на рисунке 2.17 для трех диапазонов инвариантной массы $\pi^+\pi^-\eta$. Рисунок 2.18 демонстрирует количество идентифицированных сигнальных событий (круглые точки) в зависимости от значения $m_{\pi^+\pi^-\eta}$. Количество фоновых событий, определенных путем аппроксимации двухфотонной массы, показано квадратами, в то время как кружки соответствуют вычтенному фону типа "peaking".

В области $m_{\pi^+\pi^-\eta} > 3.5 \text{ ГэВ}/c^2$ отношение количество сигнала к фону слишком маленькое и идентификация сигнальных событий не производилась. Так, в бине, представленном на рисунке 2.19, число событий определено как 4.6 ± 2.7 , при этом уровень оцененного пикованного фона составляет около 50%.

В итоге, спектр сигнальных событий определялся независимо в каждом бине путем вычитания обоих видов фона ("peaking" и "non-peaking"). Всего найдено 8065.2 ± 100.5 сигнальных событий, количество фона типа "peaking" и "non-peaking" равно 239 и 3164, соответственно.

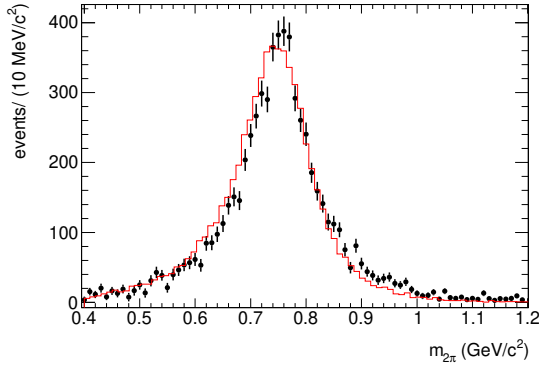


Рис. 2.20 — Двухпионная инвариантная масса для экспериментальных событий (точки с ошибками) и моделирования сигнала (гистограмма) для диапазона масс $1.4 < m_{\pi^+\pi^-\eta} < 2.0$ ГэВ/с².

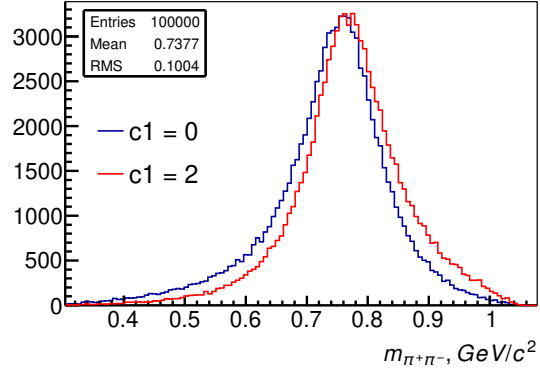


Рис. 2.21 — Спектр двухпионной инвариантной массы при $c_1 = 0$ и $c_1 = 2$ в выражении (2.5), отвечающим случаям, когда в модели участвует только $\eta\rho(770)$ и когда также добавлен вклад возбуждённого векторного состояния $\eta\rho'(1450)$.

Такая же процедура вычитания фона использована для других распределений. Так, двухпионная инвариантная масса для экспериментальных и смоделированных сигнальных событий показана на рисунке 2.20 в диапазоне масс $1.4 < m_{\pi^+\pi^-\eta} < 2.0$ ГэВ/с², где уровень фона наименьший. Как говорилось выше, в моделировании использована модель промежуточного состояния $\eta\rho(770)$. Видно, что экспериментальный спектр несколько сдвинут в область больших масс, что может быть объяснено вкладом, например, промежуточного состояния $\eta\rho(1450)$, которое интерферирует с доминирующей амплитудой $\eta\rho(770)$. Подобный эффект был также наблюден в более ранних работах с детекторами *BABAR* [7] и СНД [10]. Однако в последней работе с детектором КМД-3 [14] сдвиг не был обнаружен, несмотря на рекордную для данного процесса статистику.

Для оценки насколько меняется эффективность регистрации в связи с некоторым несовпадением спектров $m_{2\pi}$ в эксперименте и в моделировании, производится вычисление следующего выражения:

$$\delta_{model} = 1 - \frac{\int \epsilon^{reg}(m_{2\pi}) p^{data}(m_{2\pi}) dm_{2\pi}}{\int \epsilon^{reg}(m_{2\pi}) p^{MC}(m_{2\pi}) dm_{2\pi}} = 0.0040 \pm 0.0001, \quad (2.3)$$

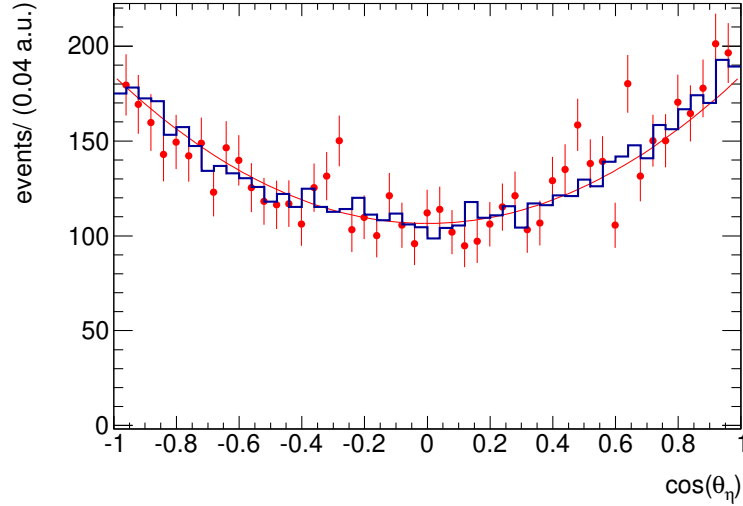


Рис. 2.22 — Распределение по $\cos \theta_\eta$ для экспериментальных событий (точки с ошибками) и моделирования сигнала (гистограмма) для диапазона масс $1.4 < m_{\pi^+\pi^-\eta} < 2.0$ ГэВ/с². Линия представляет фит, описанный в тексте.

где $\epsilon^{reg}(m_{2\pi})$ – эффективность регистрации как функция массы $m_{2\pi}$; $p^{MC(data)}(m_{2\pi})$ – профиль спектра $m_{2\pi}$ в моделировании (эксперименте).

Амплитуда перехода $\rho'(s) \rightarrow \rho(770)\eta \rightarrow \pi^+(p_1)\pi^-(p_2)\eta(p_3)$ может быть параметризована в виде:

$$A_\mu = g(s) \cdot \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \cdot p_1^\nu p_2^\alpha p_3^\beta \cdot F_\rho(m_{2\pi}), \quad (2.4)$$

где $g(s)$ – произведение констант связи, $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ – антисимметричный тензор Леви-Чивиты, форм-фактор пиона $F_\rho(m_{2\pi})$ представлен в виде:

$$F_\rho(m_{2\pi}) = \frac{m_\rho^2}{D_\rho(m_{2\pi}^2)} + \frac{c_1 \cdot m_{\rho'}^2}{D_{\rho'}(m_{2\pi}^2)}, \quad (2.5)$$


где $D_{\rho^{(\prime)}}(m_{2\pi}^2)$ – обратный пропагатор векторного мезона. Рисунок 2.21 демонстрирует спектр двухпионной инвариантной массы для случаев $c_1 = 0$ и $c_1 = 2$ в выражении (2.5). Из рисунка видно, что сдвиг на рисунке 2.20 может быть объяснен дополнительным вкладом промежуточного состояния $\eta\rho(1450)$. Однако для такого утверждения нужен полноценный амплитудный анализ на большей статистике. 

Рисунок 2.22 демонстрирует распределение по полярному углу η -мезона в системе покоя $\pi^+\pi^-\eta$ для экспериментальных данных (точки с ошибками) и моделирования (гистограмма). Видно, что моделирование хорошо воспроизводит экспериментальный спектр. Линия показывает фит данных суммой константы

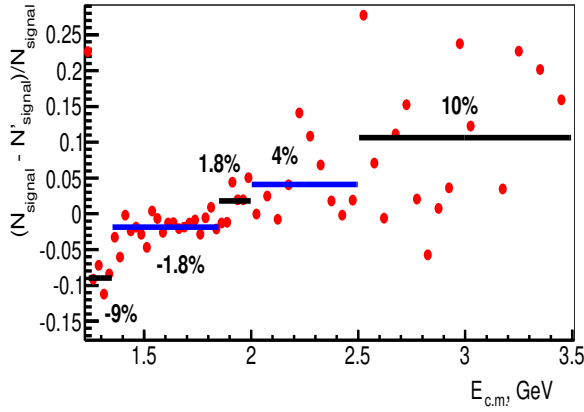


Рис. 2.23 — Относительная разница числа сигнальных событий при использовании стандартной процедуры вычитания фона (N_{signal}) и квадратичного полинома в качестве профиля фона (N'_{signal}).

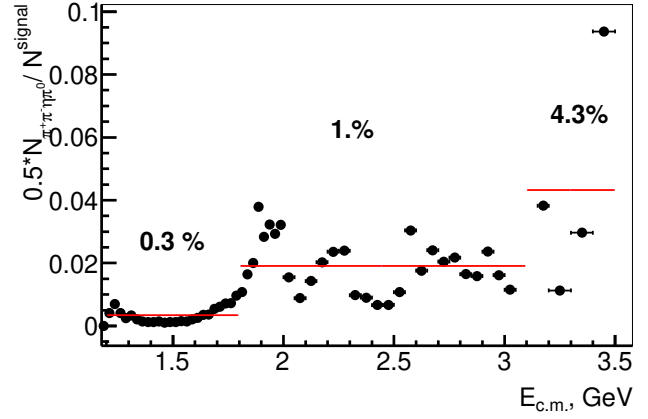


Рис. 2.24 — 50% часть событий $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\eta$ относительно полученного числа сигнальных событий.

и квадратичной функции $N \cdot (1 + (0.92 \pm 0.09) \cdot \cos^2(\theta_\eta))$. Результат фита согласуется с ожидаемым распределением на генераторном уровне $N \cdot (1 + \cos^2(\theta_\eta))$ из-за того, что отклик детектора почти не искажает спектр полярного угла η -мезона.

Для оценки систематической ошибки, связанной с выбором профиля фона, процедура аппроксимации двухфотонных спектров повторяется, где вместо фиксированного из моделирования профиля используется полином второй степени с тремя свободными параметрами. Полученная разница числа сигнальных событий представлена на рисунке 2.23 при разных $m_{\pi^+\pi^-\eta}$. Среднее отклонение этой разницы от нуля, как указано на рисунке, используется как оценка систематической ошибки.

Также неопределенность в подсчете числа сигнальных событий может быть связана с фоном типа "peaking", доминирующий вклад в который вносит процесс $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\eta$ (см. рисунок 2.16). Вычитание фона данного типа основано на моделировании JETSET, нормированного как описано в Главе 2.3.1. Как показано на рисунке 2.14 (справа) доля данного процесса относительно континуума $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ растет с 35% до 80% в изучаемой области $m_{\pi^+\pi^-\eta}$. Если предположить, что значение этой доли известно с 50% точностью, то можно оценить систематическую неопределенность, связанную с этим фоном. Так, рисунок 2.24

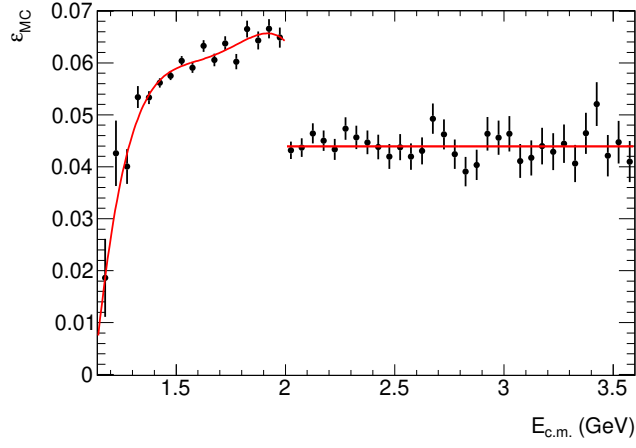


Рис. 2.25 — Эффективность регистрации ε_{MC} как функция $m_{\pi^+\pi^-\eta}$.

демонстрирует отношение 50%-ной части событий $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\eta$ относительно полученного числа сигнальных событий. Вышеобъявленные неопределенности представлены в таблице 5 в строке "Вычитание фона".

2.5 Эффективность регистрации и систематические ошибки

Эффективность регистрации искомого процесса $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$ определяется следующим образом:

$$\varepsilon = \varepsilon_{MC} \prod_i (1 + \delta_i), \quad (2.6)$$

где ε_{MC} - эффективность регистрации, определенная методом Монте-Карло моделирования как отношение спектра инвариантной массы $\pi^+\pi^-\eta$ после условий отбора и отклика детектора к генерированному спектру. Эффективность регистрации ε_{MC} как функция $m_{\pi^+\pi^-\eta}$ показана на рисунке 2.25. Поправки δ_i ответственны за учет отличий эксперимента и моделирования в эффективности реконструкции и различных условий отбора: отбор по χ_{4C}^2 , реконструкция $\eta \rightarrow \gamma\gamma$ и пионных треков, реконструкция ISR фотона, и другие примененные условия отбора.

Спектр χ_{4C}^2 в моделировании не воспроизводит в точности экспериментальные данные. Причиной этому служат, как минимум, разное разрешение детектора, а также отсутствие в моделировании NLO ISR фотонов на большой угол ($\gg 1/\gamma_{e^\pm}$). Это приводит к более длинному хвосту в экспериментальном

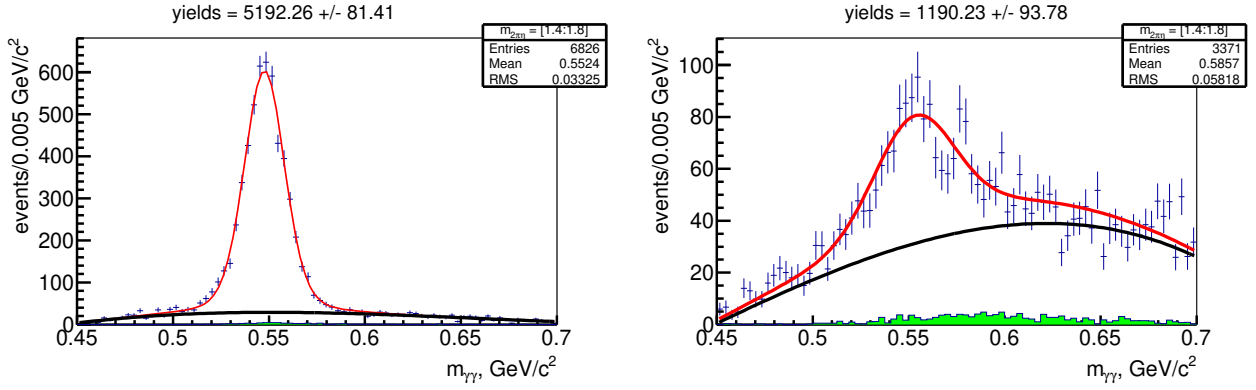


Рис. 2.26 — Аппроксимация экспериментального спектра двухфотонной инвариантной массы при $1.4 < m_{\pi^+\pi^-\eta} < 1.8$ ГэВ/с² с условием требований $\chi_{4C}^2 < 25$ (слева) и $25 < \chi_{4C}^2 < 300$ (справа). Черная линия отражает описанный спектр фона типа "non-peaking", закрашенная гистограмма - вычтенный фон типа "peaking".

распределении χ_{4C}^2 по сравнению с моделированием. Для того, чтобы отследить данный эффект, события в области $25 < \chi_{4C}^2 < 300$ при $1.4 < m_{\pi^+\pi^-\eta} < 1.8$ ГэВ/с² также были использованы для определения числа сигнальных событий. Это позволило определить следующую поправку:

$$1 + \delta_{\chi^2 < 25} = \frac{N^{data}(\chi^2 < 25)}{N^{data}(25 < \chi^2 < 300) + N^{data}(\chi^2 < 25)} \cdot \frac{N^{MC}(25 < \chi^2 < 300) + N^{MC}(\chi^2 < 25)}{N^{MC}(\chi^2 < 25)}.$$

Аппроксимация двухфотонной инвариантной массы в разных диапазонах χ_{4C}^2 представлена на рисунке 2.26, где процедура фитирования идентична той, что описана выше. В результате получается следующее значение для поправки: $\delta_{\chi^2 < 25} = 0.4 \pm 1.5\%$ ($\delta_{\chi^2 < 15} = 0.6 \pm 1.3\%$), совместимое с нулем. В качестве верхней оценки систематической ошибки, связанной с профилем χ_{4C}^2 , используется 1.5%.

Вклад остальных отборов в неопределенность эффективности регистрации определялся путем их варьирования. Так, при идентификации сигнальных событий поочередно выключались требования на то, что событие не идентифицировано как событие $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$, кандидаты в пионы не реконструированы одновременно как пионы или мюоны, требование на энергию фотонов из распада кандидата в η -мезон ($E_{\gamma 1, \gamma 2} > 100$ МэВ), а также "золотой отбор" ($m_{2\gamma}^{\pi^0} > 0.16$ ГэВ/с²). Относительная разница числа сигнальных событий $\Delta = 1 - \frac{N^{data} \cdot N_{loose}^{MC}}{N_{loose}^{data} \cdot N^{MC}}$

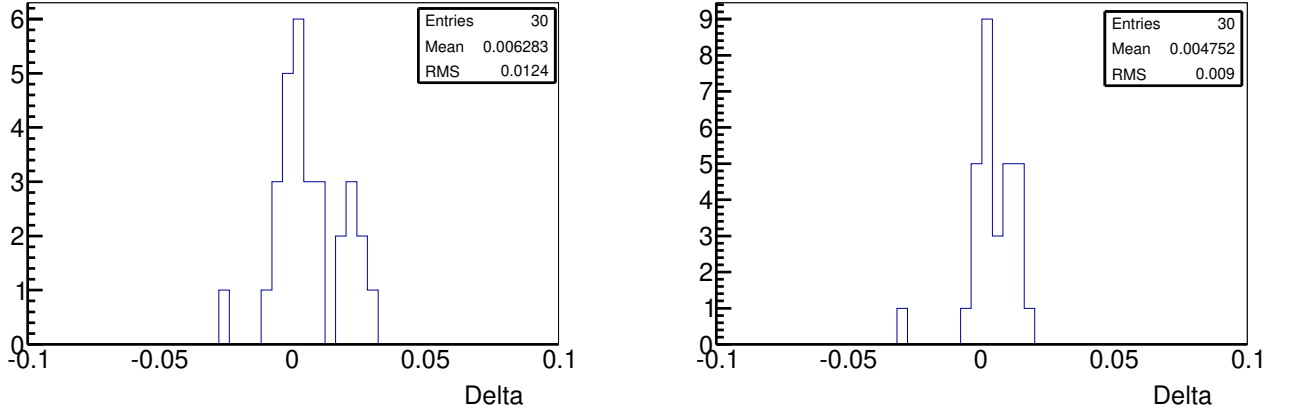


Рис. 2.27 — Относительная разница числа сигнальных событий при условии отсутствия требования того, что треки не идентифицированы как электроны (слева) или как мюоны или каоны (справа).

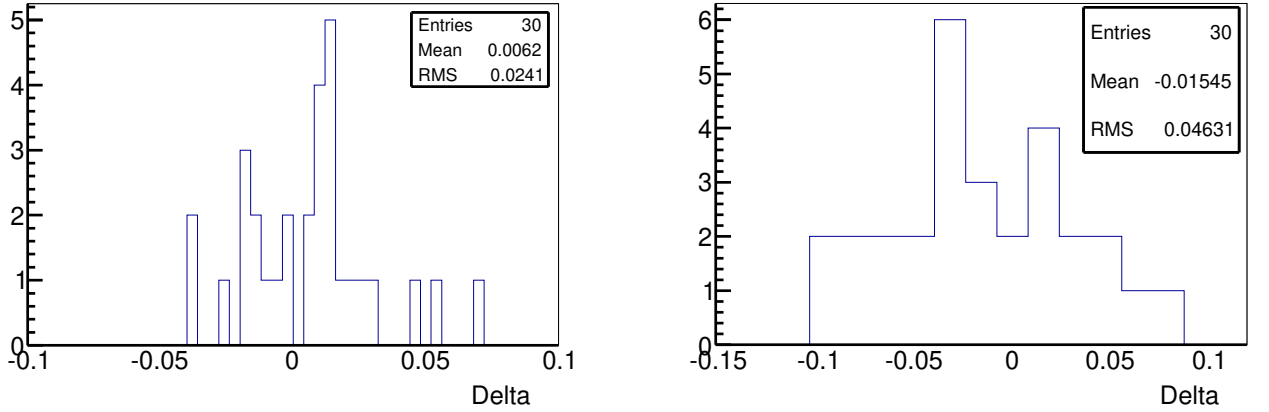


Рис. 2.28 — Относительная разница числа сигнальных событий при условии отсутствия требования на энергию фотонов из распада кандидата в η -мезон (слева) или "золотого отбора" (справа).

для бинов в области $m_{2\pi\eta} < 2$ ГэВ/ c^2 представлена на рисунках 2.27 и 2.28. Положение среднего значения данных гистограмм используется в качестве оценки соответствующей систематической ошибки, что отражено в таблице 4. Разброс в гистограммах обусловлен статистической флуктуацией числа сигнальных и фоновых событий. Суммарная ошибка в эффективности регистрации в связи с условиями отбора составляет 2.5%.

Таблица 4 — Список систематических неопределенностей в связи с примененными условиями отбора.

Условие отбора	систем. ошибка, %
$\chi^2_{4C} < 25(15)$	1.5
radbhabha == 0	0.6
kaon and muon veto	0.4
Энергия фотонов из распада η -мезона $> 0.1(0.2)$ ГэВ	0.6
$m_{2\gamma}^{\pi^0} > 0.16$ ГэВ/ c^2	1.5
Квадратичная сумма	2.5

2.5.1 Триггеры и фильтры

Как было отмечено выше, события, использованные в отборе сигнальных спектров, удовлетворяют перекрывающимся требованиям триггеров и фильтров. Так, событие может быть восстановлено в детекторе, если оно привело к формированию положительного решения в триггерах типа **hardware L1 level** и **online software L3 level**. Также чтобы событие попало в отобранный набор, оно должно пройти сквозь оффлайн фильтры. Предыдущие исследования с большей статистикой, например, изучение процесса $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0(\gamma)$ [15], показали, что суммарная эффективность триггеров для адронных событий с несколькими треками и фотонами близка к 100% и хорошо моделируется.

При отборе событий в эксперименте и в моделировании использовались следующие маски фильтра BGFfilter "BGFMultiHadron", "BGFNeutralHadron", "BGFMuMu", "BGF Tau", "BGFTwoProng", "BGFPhiGamma", "BGFAllNeutralTwoPhoton", "BGFIsr", "BGFRadTwoProng", "DigiFRadiativeBhaBha", "DigiFVirtualCompton", "DigiFDchEmcPreVeto", "DigiFL1Open", "DigiFL3Open", "BGFTwoPhotonTwoTrack". Распределение по маскам для моделированных сигнальных событий представлено на рисунке 2.29. Эффективность фильтра может быть определена, используя специальный набор событий, на которые маски не накладывались. Так, $\epsilon_{bgr.filt.}^{MC} = 0.986 \pm 0.007$ и $\epsilon_{bgr.filt.}^{data} = 0.971 \pm 0.013$ в моделировании и в эксперименте, соответственно. Приведенные значения позволяют определить поправку к моделированию, равную $1 + \delta_{trig} = 0.985 \pm 0.015$.

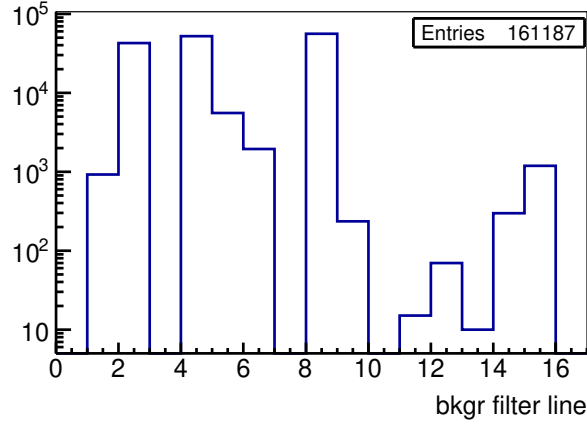


Рис. 2.29 — Распределение по маскам фильтра BGFilter для моделированных сигнальных событий.

2.5.2 Радиационная поправка

Радиационные поправки могут быть определены как отношение дифференциальных сечений процессов $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta(\gamma)$ в приближениях LO к приближению NLO. Заложенное в моделирование требование, что $m_{2\pi\eta\gamma_{ISR}} > 8$ ГэВ/с², приводит к тому, что сечение LO близко к значению NLO $\sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta(\gamma))_{LO} \approx \sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta(\gamma))_{NLO}$. На рисунке 2.30 показано распределение по инвариантной массе адронной системы и ISR фотона в различных диапазонах $m_{2\pi\eta}$ для событий моделирования. Из рисунка видно, что спектр NLO фотонов, а значит и радиационная поправка не зависят от значения $m_{2\pi\eta}$.

2.5.3 Эффективность реконструкции фотонов



Неэффективность реконструкции фотонов обусловлена, главным образом, пассивным материалом между кристаллами в калориметре, а также конверсией фотонов во внутренних подсистемах детектора. Уровень неэффективности в эксперименте должен быть сравнен с неэффективностью в моделировании, которое не описывает полноценно слияние электромагнитных ливней в калориметре детектора от фотонов из распада η -мезона, также эффективность рекон-

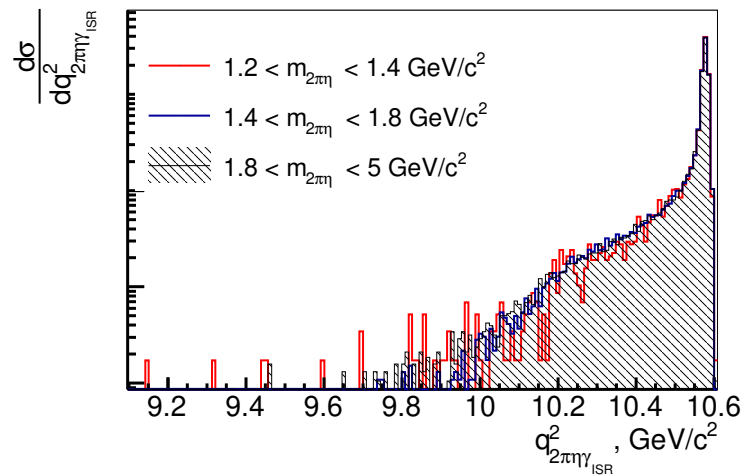


Рис. 2.30 — Распределение по инвариантной массе адронной системы и ISR фотона в различных диапазонах $m_{2\pi\eta}$.

струкции фотона в моделировании может отличаться от экспериментального значения.

Предполагается, что поправка к вероятности регистрации η -мезона равна поправке к π^0 -мезону при той же скорости движения. Последняя поправка определяется путем изучения процесса $e^+e^- \rightarrow \omega(\gamma)\pi^0\pi^-(\gamma)$. Действительно, используя параметры задетектированного ISR фотона и заряженных пионов, система $3\pi\gamma$ может быть идентифицирована. Для этой цели также используется кинематическая реконструкция с требованием (1C), что улетевшая масса равна m_{π^0} . В результате составляется список кандидатов в π^0 с предсказанными кинематическими параметрами. Проверка физического наличия искомых фотонов из распада π^0 -мезона позволяет определить эффективность его регистрации, независимо, в эксперименте и в моделировании. В поиске кандидатов в фотоны также выполняется кинематическая реконструкция с 5 требованиями (5C), учитывающими закон сохранения энергии и принадлежность фотонов к π^0 .

Монте-Карло моделирование и экспериментальные данные содержат значительный вклад от низкоэнергетических фотонов, связанных с расщеплением электромагнитных ливней в калориметре, до ионизирующим излучением заряженных пионов (FSR), дополнительными ISR фотонами, излучением пучкового фона и др.. Для определения эффективности регистрации π^0 используется комбинация с минимальным значением χ^2_{5C} .

Аппроксимация экспериментального спектра трехпионной инвариантной массы показана на рисунке 2.31. Сундук слева демонстрирует аппроксимацию

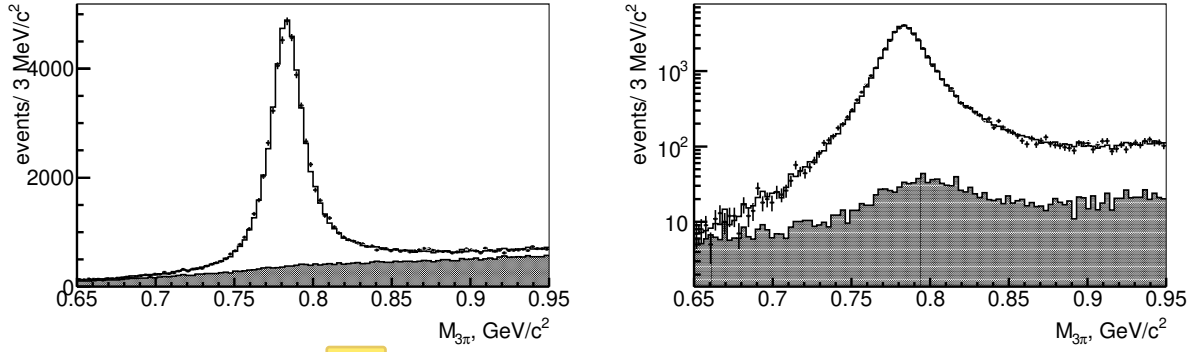


Рис. 2.31 — Спектр трёхпионной инвариантной массы для экспериментальных событий до проверки зафиксирован ли π^0 (слева) и для событий, в которых был найден кандидат в π^0 (справа).

экспериментального спектра $m_{3\pi}$ до проверки зафиксирован ли нейтральный пион, в то время как рисунок справа относится к событиям, в которых был найден кандидат в π^0 . Точки с ошибками соответствуют экспериментальным данным, открытая гистограмма отражает результат аппроксимации, закрашенная гистограмма - вклад фона. В качестве функции для фита используется сумма профилей сигнала и фона. Первый был зафиксирован из моделирования. Второй состоит из профиля главного источника фона ($e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-2\pi^0(\gamma)$) плюс линейная функция со свободными параметрами.

Отношение эффективностей реконструкции π^0 в эксперименте и моделировании показано на рисунке 2.32 в зависимости от верхней границы требования на χ^2_{5C} . Данное поведение в области $\chi^2_{5C} < 100$ определяется не вполне корректным моделированием разрешения отклика детектора. В то время как в области больших значений χ^2_{5C} отличие связано как с тем, что дополнительные к ISR фотоны моделируются лишь в направлении электрон-позитронной оси, так и с наличием немоделируемого фона. Нужно отметить, что точки с ошибками на рисунке 2.32 сильно коррелированы. Конечная поправка к эффективности получена путем аппроксимации распределения на рисунке 2.32 линейной функцией и ее экстраполяцией в ноль.

Эффективность регистрации π^0 и поправка к моделированию ($\epsilon_{data}/\epsilon_{MC} - 1$) в зависимости от импульса и полярного угла π^0 показана на рисунках 2.33 и 2.34, соответственно. Красные точки отражают моделирование, синие точки соответствуют эксперименту. Поправка, усредненная по импульсу, равна $\epsilon_{data}/\epsilon_{MC} - 1 = -2 \pm 0.5\%$. Предполагается, что поправка не зависит от ско-

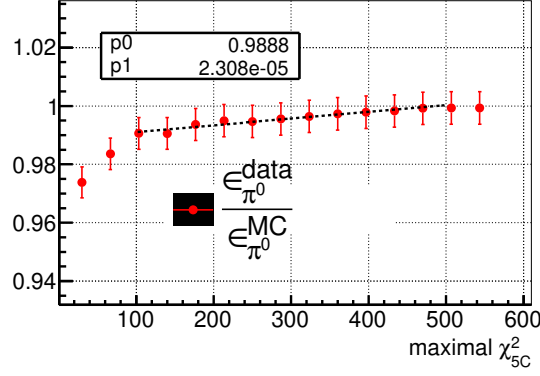


Рис. 2.32 — Отношение эффективностей $\epsilon_{\pi^0}^{data}/\epsilon_{\pi^0}^{MC}$ в зависимости от значения наложенного требования на χ_{5C}^2 .

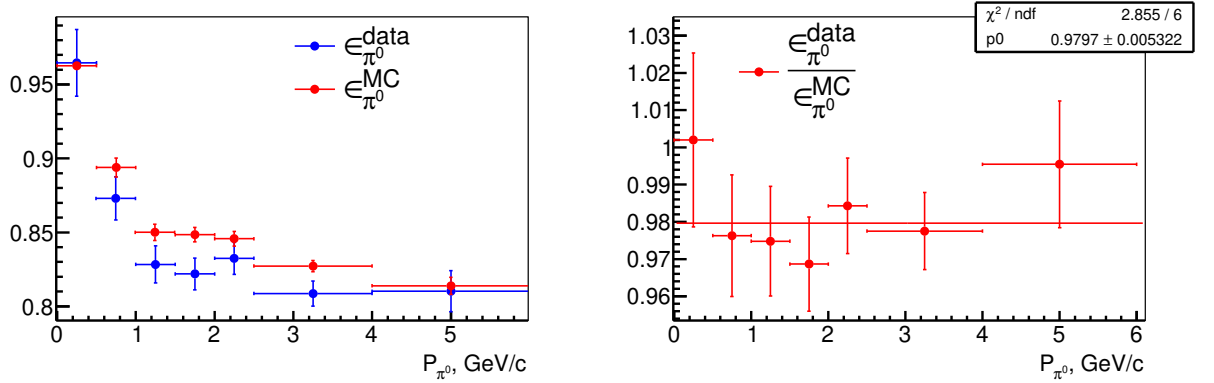


Рис. 2.33 — (слева) Эффективность реконструкции π^0 -мезона в зависимости от импульса; (справа) отношение эффективностей $\epsilon_{\pi^0}^{data}/\epsilon_{\pi^0}^{MC}$ в зависимости от импульса π^0 .

рости мезона и найденная поправка может быть применена также к случаю η -мезона. Варьируя условия отбора, была определена систематическая ошибка данной поправки, квадратичная сумма которой со статистической ошибкой приводит к результату $\epsilon_{data}/\epsilon_{MC} - 1 = -2 \pm 1\%$.

2.5.4 Эффективность реконструкции ISR фотона

Спектр фотонов из распадов π^0 , обсужденных в предыдущей главе, представлен на Рис. 2.35. Видно, что, используя процесс $e^+e^- \rightarrow \omega\gamma \rightarrow 3\pi\gamma$, можно

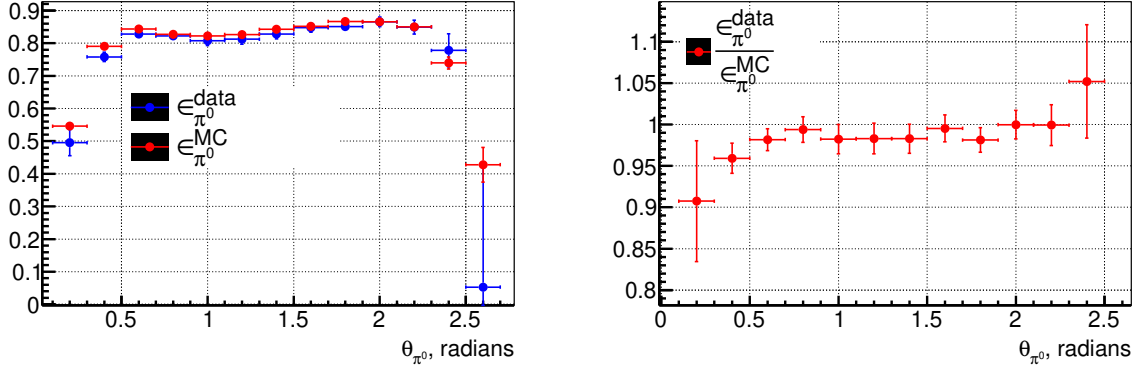


Рис. 2.34 — (слева) Эффективность реконструкции π^0 -мезона в зависимости от его полярного угла в с.ц.м.; (справа) отношение эффективностей $\epsilon_{\pi^0}^{data} / \epsilon_{\pi^0}^{MC}$ в зависимости от угла π^0 .

определить поправку на реконструкцию фотонов лишь при энергиях менее 3 ГэВ.

Изучение эффективности реконструкции высокоэнергетических фотонов (> 3 ГэВ) не производилось в рамках данной работы. Это было сделано в анализе процесса $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma$, где угол и импульс фотона восстанавливается на основе параметров задетектированных мюонов. Поправка к эффективности составляет по величине $\sim 1\%$ и зависит от полярного угла. Поправка как функция угла была свернута со спектром полярного угла ISR фотона ($\theta_{\gamma_{ISR}}$) в отобранных сигнальных событиях $2\pi\eta(\gamma)$ и в результате составила $\delta_{\gamma_{ISR}} = -1.1 \pm 1\%$. Спектры $\theta_{\gamma_{ISR}}$ до и после поправки показаны на рисунке 2.36 и почти неотличимы.

2.5.5 Эффективность реконструкции треков

Поправка к моделированию на эффективность реконструкции треков не изучалась в рамках данной работы, а определялась исходя из результатов по изучению процесса $e^+e^- \rightarrow 2\pi^+2\pi^-$ [42]. В этом исследовании данное конечное состояние фиксировалось в детекторе на основе идентификации трех треков заряженных пионов и γ_{ISR} . Наличие и импульс четвертого трека предсказывался с помощью кинематической реконструкции с одним требованием, что масса улетевшего четвертого трека равна m_π . Также изучалась неэффективность

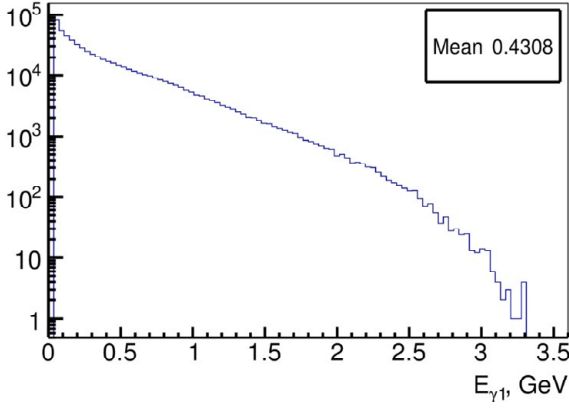


Рис. 2.35 — Спектр энергий фотонов из распада π^0 в процессе $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0(\gamma)$.

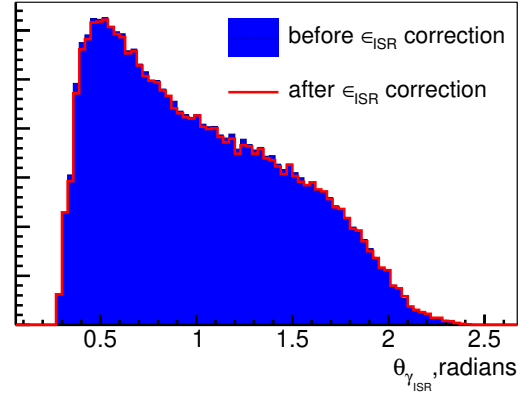



Рис. 2.36 — Спектры полярного угла ISR фотона до и после поправки на эффективность реконструкции.

трека в зависимости от поперечного импульса ($p_t = 0.1 \div 3$ ГэВ/с), полярного угла и степени его перекрытия с другими треками. Эффект перекрытия в ISR процессах играет важную роль в связи с тем, что адронная система движется с большой скоростью в направлении, противоположном высокоэнергетическому ISR фотону в с.ц.м.. В области импульсов выше 0.5 ГэВ/с неэффективность реконструкции треков составляет менее 3% и уменьшается с ростом импульса. Однако при малых импульсах неэффективность значительно выше и составляет около 15% при $p_t = 0.1$ ГэВ/с.

Разница эффективностей реконструкции заряженных пионов в эксперимента и в моделировании составила $\epsilon_{data}^{\pi^\pm} - \epsilon_{MC}^{\pi^\pm} = \Delta\epsilon^{\pi^\pm} = (-0.75 \pm 0.05_{stat} \pm 0.34_{syst})\%$. Значительной зависимости $\Delta\epsilon^{\pi^\pm}$ от импульса и полярного угла обнаружено не было. Примерно половина этой разницы обусловлена перекрытием треков противоположного знака (эффект перекрытия треков одного знака был выявлен гораздо меньшим). Убрав эффект перекрытия из рассмотрения, была определена разница эффективностей реконструкции одиночных треков $\epsilon'_{data} - \epsilon'_{MC} = \Delta\epsilon' = (-0.38 \pm 0.05_{stat} \pm 0.39_{syst})\%$. То есть неэффективность реконструкции трека ввиду его перекрытия с другими составляет $\Delta\epsilon^{\pi^\pm} - \Delta\epsilon'$ для событий $2\pi^+2\pi^-(\gamma)$ или $0.5 \cdot (\Delta\epsilon^{\pi^\pm} - \Delta\epsilon')$ для событий $\pi^+\pi^-\eta(\gamma)$. Суммарно, поправка на эффективность реконструкции треков составляет: $\delta_{tracks} = \frac{\epsilon_{exp}}{\epsilon_{mc}} - 1 \approx 2 \cdot (\Delta\epsilon' + 0.5 \cdot (\Delta\epsilon^{\pi^\pm} - \Delta\epsilon')) = -1.1 \pm 0.5 \%$. При подсчете сечения искомого процесса приведенная ошибка 0.5% увеличена в два раза, чтобы учесть возможную зависимость поправки от количества треков.

Таблица 5 — Поправки к эффективности регистрации и систематические ошибки

Источник	Поправка, %	Систематическая ошибка, %
Условие отбора		2.5
Вычитание фона		
$m_{\pi^+\pi^-\eta} < 1.35$		9
$1.35 < m_{\pi^+\pi^-\eta} < 1.80$		2
$1.80 < m_{\pi^+\pi^-\eta} < 2.50$		5
$2.50 < m_{\pi^+\pi^-\eta} < 3.10$		10.5
$3.10 < m_{\pi^+\pi^-\eta} < 3.50$		11
реконструкция η -мезона	-2	1.0
реконструкция треков	-1.1	1.0
реконструкция ISR фотона	-1.1	1.0
триггеры и фильтры	-1.5	1.6
радиационная поправка		1.0
светимость		1.0
Итог		
$m_{\pi^+\pi^-\eta} < 1.35$	-5.7	10
$1.35 < m_{\pi^+\pi^-\eta} < 1.80$	-5.7	4.5
$1.80 < m_{\pi^+\pi^-\eta} < 2.50$	-5.7	6.5
$2.50 < m_{\pi^+\pi^-\eta} < 3.10$	-5.7	11
$3.10 < m_{\pi^+\pi^-\eta} < 3.50$	-5.7	12

 Все поправки к эффективности регистрации сигнала, обсужденные в этой главе, приведены в табл. 5. В целом поправка к эффективности составляет -5.7% по отношению к значению из моделирования. Оценка поправки оценивается как квадратичная сумма всех источников и составляет 4.5% в области $1.35 < m_{\pi^+\pi^-\eta} < 1.8 \text{ ГэВ}/c^2$, наилучшая статистическая точность. В других областях инвариантной массы ошибка больше, ввиду большей неопределенности в вычитании фона.

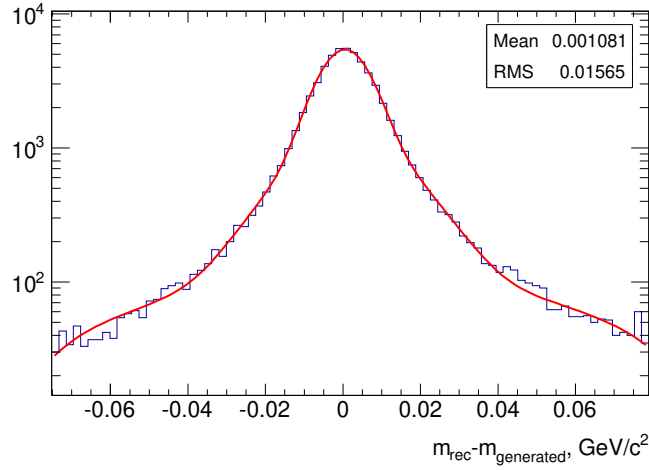


Рис. 2.37 — Спектр разницы между реконструированными и сгенерированными значениями инвариантной массы $\pi^+\pi^-\eta$ в моделировании для событий в Области I.

2.6 Сечение процесса $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$

Используя спектр масс системы $\pi^+\pi^-\eta$, значение $\sigma(m)$ искомого процесса определяется следующим образом:

$$\sigma_{\pi^+\pi^-\eta}(m) = \frac{(dN/dm)_{corr}}{dL/dm \cdot \varepsilon(m) \cdot R}, \quad (2.7)$$

где m - инвариантная масса системы $\pi^+\pi^-\eta$; $(dN/dm)_{corr}$ - число сигнальных событий, после учета разрешения детектора (unfolding); dL/dm - дифференциальная ISR светимость [40]; $\varepsilon(m)$ - эффективность регистрации; R - радиационная поправка. Систематические неопределенности всех величин в правой части выражения 2.7 представлены в таблице 5.

Спектр сигнальных событий, представленный на рисунке 2.18, подвергается отклику разрешения детектора при реконструкции инвариантной массы двух заряженных пионов и η -мезона. Этот эффект изучался в моделировании. Так, спектр разницы между реконструированными и сгенерированными значениями инвариантной массы $\pi^+\pi^-\eta$ представлен на рисунке 2.37 для событий моделирования в Области I. Среднеквадратичное отклонение спектра составляет около 16 МэВ, что сравнимо по порядку величин с выбранной шириной (25 МэВ) бина в спектре $m_{\pi^+\pi^-\eta}$. Истинное число сигнальных событий dN_{corr} связано с измеренным спектром dN как $dN(i) = \sum A(i,j) \cdot dN_{corr}(j)$, где $A(i,j)$ - веро-

ятность событию со значением $m_{\pi^+\pi^-\eta}$ в бине j быть реконструированным в бине i . $A(i,j)$ извлечена из моделирования и практически не зависит от $m_{\pi^+\pi^-\eta}$. Для бина шириной 25 МэВ диагональные элементы составляют $A(i,i) \approx 0.83$, и соседние к диагональным элементам $A(i \pm 1, i) \approx 0.08$. Более детально:

$$A = \begin{pmatrix} 0.825 & 0.083 & 0.003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0.083 & 0.825 & 0.083 & 0.003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0.003 & 0.083 & 0.825 & 0.083 & 0.003 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0.003 & 0.083 & 0.825 & 0.083 & 0.003 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0.003 & 0.083 & 0.825 & 0.083 & 0.003 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0.003 & 0.083 & 0.825 & 0.083 & 0.003 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.003 & 0.083 & 0.825 & 0.083 & 0.003 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.003 & 0.083 & 0.825 & 0.083 & 0.003 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.003 & 0.083 & 0.825 & 0.083 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.003 & 0.083 & 0.825 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Используя метод Gauss-Jordan поиска обратных матриц [44], реализованный в ROOT, был найден вид A^{-1} как:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1.223 & -0.124 & 0.007 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ -0.124 & 1.236 & -0.125 & 0.007 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0.007 & -0.125 & 1.236 & -0.125 & 0.007 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0.007 & -0.125 & 1.236 & -0.125 & 0.007 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0.007 & -0.125 & 1.236 & -0.125 & 0.007 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0.007 & -0.125 & 1.236 & -0.125 & 0.007 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.007 & -0.125 & 1.236 & -0.125 & 0.007 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.007 & -0.125 & 1.236 & -0.125 & 0.007 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.007 & -0.125 & 1.236 & -0.125 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.007 & -0.125 & 1.236 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Обратная матрица может быть использована для определения истинного числа сигнальных событий как:

$$dN_{corr}(i) = \sum A^{-1}(i,j) \cdot dN(j) \quad (2.8)$$

Таблица 6 демонстрирует сравнение dN и dN_{corr} . Ввиду отсутствия узких резонансов в сечении изучаемой реакции, dN и dN_{corr} отличаются незначительно по сравнению со статистическими ошибками, однако данная коррекция на разрешение приводит к увеличению ошибки (на 4–15%), а также к корреляциям между собой. Тем не менее, коррекция составляет -8% для бина $1.8875 < m_{\pi^+\pi^-\eta} < 1.900$ МэВ/с². Полученные значения сечения искривленной реакции в диапазоне $E_{c.m.} = 1.15 \div 3.5$ ГэВ перечислены в таблице 7 и на рисунке 2.38. Видно, что в целом полученные результаты согласуются с другими измерениями и обладают лучшей точностью. Более детальное сравнение с другими экспериментами будет обсуждено ниже. Представленные статистические

Таблица 6 — Измеренное dN и истинное dN_{corr} число сигнальных событий.

\sqrt{s} , ГэВ	dN	dN_{corr}
1.2 - 1.225	7.8978 ± 4.38387	9.66185 ± 3.47885
1.225 - 1.25	4.53053 ± 5.30536	2.98849 ± 2.69964
1.25 - 1.275	14.8622 ± 6.79058	13.5715 ± 4.83424
1.275 - 1.3	36.2814 ± 8.71999	38.9448 ± 7.50258
1.3 - 1.325	36.651 ± 9.19583	32.5989 ± 7.59965
1.325 - 1.35	72.1239 ± 11.1078	72.3387 ± 10.6097
1.35 - 1.375	108.049 ± 12.7077	107.91 ± 12.9867
1.375 - 1.4	146.01 ± 14.6023	144.614 ± 15.1029
1.4 - 1.425	198.56 ± 16.6054	195.313 ± 17.6166
1.425 - 1.45	280.682 ± 19.1505	281.718 ± 20.9253
1.45 - 1.475	352.526 ± 20.5847	357.284 ± 23.4407
1.475 - 1.5	381.287 ± 21.5836	380.06 ± 24.3956
1.5 - 1.525	417.16 ± 22.5415	419.147 ± 25.5091
1.525 - 1.55	433.908 ± 22.9518	436.768 ± 26.0136
1.55 - 1.575	422.52 ± 22.6286	424.203 ± 25.673
1.575 - 1.6	393.642 ± 21.6575	394.462 ± 24.7828
1.6 - 1.625	356.661 ± 21.0982	355.979 ± 23.5946
1.625 - 1.65	326.003 ± 19.8504	324.77 ± 22.5595
1.65 - 1.675	305.957 ± 19.1473	307.642 ± 21.847
1.675 - 1.7	274.048 ± 18.5332	269.271 ± 20.6963
1.7 - 1.725	283.435 ± 18.5898	285.238 ± 21.0266
1.725 - 1.75	279.514 ± 18.5731	278.887 ± 20.8872
1.75 - 1.775	279.714 ± 18.1042	280.701 ± 20.8901
1.775 - 1.8	272.06 ± 18.0145	270.437 ± 20.6084
1.8 - 1.825	272.843 ± 18.2127	282.765 ± 20.6018
1.825 - 1.85	187.573 ± 15.4288	182.233 ± 17.1286
1.85 - 1.875	144.286 ± 13.6053	145.73 ± 15.0035
1.875 - 1.9	96.264 ± 11.9321	86.764 ± 12.3097
1.9 - 1.925	130.144 ± 13.0889	136.237 ± 14.2244
1.925 - 1.95	115.352 ± 12.6216	113.36 ± 13.4253
1.95 - 1.975	114.597 ± 11.9057	115.766 ± 13.368
1.975 - 2	106.813 ± 12.2944	102.386 ± 12.8134

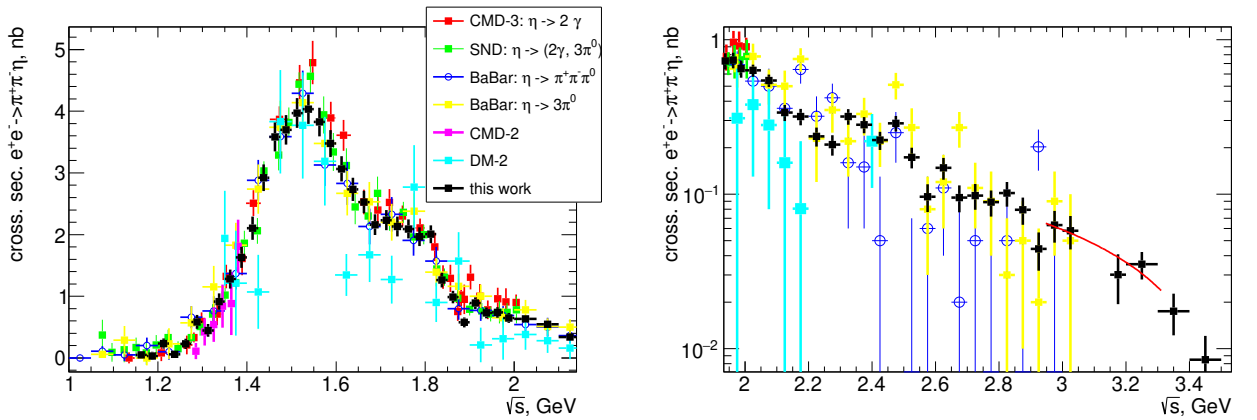
Рис. 2.38 — Борновское сечение процесса $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$ как функция $E_{c.m.}$ для Области I (слева) и Области II (справа).

Таблица 7 — Таблица результатов: диапазон масс $m_{\pi^+\pi^-\eta}$, количество сигнальных событий в данном диапазоне (dN_{corr}/dm), эффективность регистрации (ε), дифференциальная ISR светимость (dL/dm), сечение реакции $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$ (σ). Систематические ошибки в различных интервалах масс представлены в таблице 7.

Е _{с.м.} , GeV	dN_{corr}/dm	ε , %	dL nb ⁻¹	σ nb	Е _{с.м.} , GeV	dN_{corr}/dm	ε , %	dL nb ⁻¹	σ nb
1.150 - 1.175	<1 (90%CL)	1.36	1439	<0.05 (90%CL)	1.875 - 1.900	86 ± 12	6.17	2430	0.575 ± 0.081
1.175 - 1.20	<1 (90%CL)	2.12	1468	< 0.03 (90%CL)	1.900 - 1.925	136 ± 14	6.19	2468	0.888 ± 0.092
1.20 - 1.225	9 ± 3	2.77	1497	0.231 ± 0.083	1.925 - 1.950	113 ± 13	6.18	2506	0.728 ± 0.086
1.225 - 1.250	2 ± 2	3.33	1528	0.058 ± 0.052	1.950 - 1.975	115 ± 13	6.15	2545	0.736 ± 0.085
1.250 - 1.275	13 ± 4	3.79	1558	0.228 ± 0.081	1.975 - 2.00	102 ± 12	6.08	2583	0.648 ± 0.081
1.275 - 1.300	38 ± 7	4.18	1589	0.583 ± 0.112	2.00 - 2.05	138 ± 12	4.14	5283	0.632 ± 0.057
1.300 - 1.325	32 ± 7	4.51	1621	0.444 ± 0.103	2.05 - 2.10	122 ± 11	4.14	5439	0.544 ± 0.050
1.325 - 1.350	72 ± 10	4.77	1652	0.914 ± 0.134	2.10 - 2.15	78 ± 9	4.14	5596	0.337 ± 0.039
1.350 - 1.375	107 ± 12	4.98	1685	1.280 ± 0.154	2.15 - 2.20	76 ± 9	4.14	5754	0.317 ± 0.038
1.375 - 1.40	144 ± 15	5.15	1717	1.628 ± 0.170	2.20 - 2.25	58 ± 8	4.14	5914	0.236 ± 0.033
1.400 - 1.425	195 ± 17	5.28	1750	2.103 ± 0.189	2.25 - 2.30	52 ± 7	4.14	6074	0.209 ± 0.031
1.425 - 1.450	281 ± 20	5.38	1783	2.920 ± 0.216	2.30 - 2.35	82 ± 9	4.14	6236	0.317 ± 0.036
1.450 - 1.475	357 ± 23	5.46	1817	3.582 ± 0.235	2.35 - 2.40	74 ± 9	4.14	6399	0.281 ± 0.033
1.475 - 1.500	380 ± 24	5.53	1851	3.699 ± 0.237	2.40 - 2.45	60 ± 8	4.14	6564	0.223 ± 0.030
1.500 - 1.525	419 ± 25	5.57	1885	3.970 ± 0.241	2.45 - 2.50	80 ± 9	4.14	6729	0.287 ± 0.032
1.525 - 1.550	436 ± 26	5.61	1920	4.035 ± 0.240	2.50 - 2.55	49 ± 7	4.14	6896	0.173 ± 0.026
1.550 - 1.575	424 ± 25	5.65	1955	3.826 ± 0.231	2.55 - 2.60	28 ± 5	4.14	7065	0.096 ± 0.019
1.575 - 1.600	394 ± 24	5.68	1990	3.476 ± 0.218	2.60 - 2.65	44 ± 7	4.14	7235	0.147 ± 0.023
1.600 - 1.625	355 ± 23	5.71	2025	3.065 ± 0.203	2.65 - 2.70	29 ± 5	4.14	7407	0.095 ± 0.018
1.625 - 1.650	324 ± 22	5.74	2061	2.732 ± 0.189	2.70 - 2.75	30 ± 5	4.14	7581	0.097 ± 0.018
1.650 - 1.675	307 ± 21	5.78	2097	2.528 ± 0.179	2.75 - 2.80	28 ± 5	4.14	7756	0.088 ± 0.017
1.675 - 1.700	269 ± 20	5.82	2133	2.161 ± 0.166	2.80 - 2.85	33 ± 6	4.14	7933	0.101 ± 0.018
1.700 - 1.725	285 ± 21	5.86	2170	2.233 ± 0.164	2.85 - 2.90	26 ± 5	4.14	8113	0.079 ± 0.015
1.725 - 1.750	278 ± 20	5.91	2206	2.130 ± 0.159	2.90 - 2.95	15 ± 4	4.14	8294	0.044 ± 0.012
1.750 - 1.775	280 ± 20	5.96	2243	2.091 ± 0.155	2.95 - 3.00	22 ± 5	4.14	8478	0.063 ± 0.014
1.775 - 1.800	270 ± 20	6.01	2280	1.965 ± 0.149	3.00 - 3.05	20 ± 5	4.14	8665	0.058 ± 0.014
1.800 - 1.825	282 ± 20	6.06	2317	2.005 ± 0.146	3.15 - 3.20	11 ± 4	4.14	9241	0.030 ± 0.010
1.825 - 1.850	182 ± 17	6.11	2355	1.262 ± 0.118	3.20 - 3.30	26 ± 5	4.14	19077	0.033 ± 0.007
1.850 - 1.875	145 ± 15	6.15	2392	0.987 ± 0.101	3.30 - 3.40	14 ± 4	4.14	19893	0.017 ± 0.005
1.875 - 1.900	86 ± 12	6.17	2430	0.575 ± 0.081	3.40 - 3.50	7 ± 3	4.14	20737	0.008 ± 0.003

ошибки - диагональные. Они были определены как:

$$\begin{aligned}
cov^{i,j} &= \overline{(N_{corr}^i - \overline{N_{corr}^i})((N_{corr}^j - \overline{N_{corr}^j})} = \overline{N_{corr}^i N_{corr}^j} - \overline{N_{corr}^i} \overline{N_{corr}^j} = \\
&= \sum_{l,k} A_{il}^{-1} A_{jk}^{-1} (\overline{N_k N_l} - \overline{N_k} \overline{N_l}) = \sum_l A_{il}^{-1} A_{jl}^{-1} \sigma_l^2,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

так как $\overline{N_k N_l} - \overline{N_k} \overline{N_l} = 0$, если $k = l$.

2.7 Аппроксимация энергетической зависимости сечения

$$e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta.$$

В рамках модели векторной доминантности (МВД) энергетическое поведение сечения искомого процесса $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$ определяется вкладом изовекторных резонансов $\rho(770)$, $\rho(1450)$, $\rho(1700)$, ρ''' и др., распадающихся на $\eta\rho(770) \rightarrow \eta\pi^+\pi^-$ [2]:

$$\sigma^{model}(s) = \frac{4\alpha^2}{3} \frac{1}{s\sqrt{s}} |F(s)|^2 G(s), \quad (2.10)$$

$$G(s) = \int_{4m_\pi^2}^{(\sqrt{s}-m_\eta)^2} dq^2 \frac{\sqrt{q^2} \Gamma_\rho(q^2) p_\eta^3(s, q^2)}{(q^2 - m_\rho^2)^2 + (\sqrt{q^2} \Gamma_\rho(q^2))^2},$$

$$p_\eta^2 = \frac{(s - m_\eta^2 - q^2)^2 - 4m_\eta^2 q^2}{4s}, \quad \Gamma_\rho(q^2) = \Gamma_\rho(m_\rho^2) \frac{m_\rho^2}{q^2} \left(\frac{p_\pi^2(q^2)}{p_\pi^2(m_\rho^2)} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad p_\pi^2(q^2) = q^2/4 - m_\pi^2,$$

где $\sqrt{s} = E_{c.m.}$, q - импульс системы $\pi^+\pi^-$, и

$$F(s) = \sum_V \frac{m_V^2 g_V e^{i\phi_V}}{s - m_V^2 + i\sqrt{s} \Gamma_V(s)}, \quad (2.11)$$

где $V = \rho(770)$, $\rho(1450)$, $\rho(1700)$, ρ''' . Там используются комплексные множители $g_V e^{i\phi_V}$, которые есть комбинация величин $g_{V\rho\eta}$ и $g_{V\gamma}$, описывающих переходы $V \rightarrow \rho\eta$ и $V \rightarrow \gamma^*$, соответственно.

Модель (2.10) используется для описания энергетического поведения искомого сечения. Для определения значений искомых параметров минимизируется следующая функция χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(\sigma_i(s) - \sigma^{model}(s))^2}{d\sigma_i(s)^2}, \quad (2.12)$$

где сумма производится по экспериментальным точкам и $d\sigma_i(s)$ - статистическая ошибка в измеренном сечении $\sigma_i(s)$. Свободными параметрами выступают все величины g_V , а также массы и ширины возбужденных ρ -подобных состояний. Масса и ширина $\rho(770)$ зафиксирована из таблиц PDG [53]. Фаза $\phi_{\rho(770)}$ зафиксирована в нуле. Ожидается, что константы связи ($g_{V\rho\eta}$ и $g_{V\gamma}$) не обладают значительной мнимой частью [10], поэтому фазы (ϕ_V) для возбужденных ρ -мезонов фиксировались на 0 или π . Тестировались модели с композицией двух, трех и четырех промежуточных состояний.

Таблица 8 — Константы связи, параметры резонансов и χ^2/ndf , полученные из аппроксимации энергитического поведения сечения искомой реакции $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$.

Параметр	Модели №1	Модели №2	Модели №3	Модели №4	Модели №5	Модели №6
$g_{\rho(770)}, \text{GeV}^{-1}$	1.1 ± 0.3	2.3 ± 0.3	1.8 ± 0.3	1.4 ± 0.3	1.7 ± 0.3	1.8 ± 0.3
$g_{\rho(1450)}, \text{GeV}^{-1}$	0.49 ± 0.02	0.36 ± 0.05	0.44 ± 0.02	0.44 ± 0.02	0.46 ± 0.03	0.47 ± 0.03
$g_{\rho(1700)}, \text{GeV}^{-1}$	—	0.044 ± 0.019	0.080 ± 0.012	0.025 ± 0.017	0.016 ± 0.007	0.016 ± 0.007
$g_{\rho'''}, \text{GeV}^{-1}$	—	—	—	—	0.094 ± 0.016	0.10 ± 0.02
$m_{\rho(1450)}, \text{ГэВ}/c^2$	1.487 ± 0.016	1.54 ± 0.01	1.50 ± 0.01	1.49 ± 0.01	1.49 ± 0.01	1.49 ± 0.01
$m_{\rho(1700)}, \text{ГэВ}/c^2$	—	1.76 ± 0.01	1.83 ± 0.01	1.82 ± 0.01	1.83 ± 0.01	1.827 ± 0.006
$m_{\rho'''}, \text{ГэВ}/c^2$	—	—	—	—	2.03 ± 0.04	2.00 ± 0.04
$\Gamma_{\rho(1450)}, \text{ГэВ}$	0.33 ± 0.02	0.31 ± 0.03	0.28 ± 0.02	0.31 ± 0.02	0.29 ± 0.02	0.29 ± 0.02
$\Gamma_{\rho(1700)}, \text{ГэВ}$	—	0.16 ± 0.04	0.17 ± 0.02	0.12 ± 0.04	0.08 ± 0.02	0.08 ± 0.02
$\Gamma_{\rho'''}, \text{ГэВ}$	—	—	—	—	0.42 ± 0.09	0.45 ± 0.10
ϕ_V	0, π	0, π , π	0, π , 0	0, π , (-1.1 ± 0.4)	0, π , 0, 0	0, π , 0, 0
χ^2/ndf	14/16	35/21	19/21	18/20	28/26	48/50

В Модели №1 аппроксимировались данные в диапазоне $E_{\text{с.м.}} = 1.2 \div 1.70$ ГэВ с учетом двух резонансов, $\rho(770)$ и $\rho(1450)$. Выбор фазы $\phi_{\rho(1450)} = 0$ не позволяет описать данные. Модель с $\phi_{\rho(1450)} = \pi$ показана на рисунке 2.39 длинным пунктиром, где видно, что экспериментальное поведение сечения в районе 1.8 ГэВ не описывается. Полученные параметры также представлены в таблице 8, в которой приведены только статистические ошибки.

В Моделях №2 и №3 учитывается также вклад резонанса $\rho(1700)$ с фазой $\phi_{\rho 1700} = \pi$ и 0, соответственно. Аппроксимации сечения с данными моделями выполнены в диапазоне $E_{\text{с.м.}} = 1.2 \div 1.90$ ГэВ. Видно, что обе модели неплохо описывают данные в диапазоне энергий до 1.90 ГэВ. Однако Модель №3 имеет меньшее значение χ^2 ($P(\chi^2) = 0.58$ вместо 0.03 для Модели №2). При энергиях выше 1.90 ГэВ кривые фитов лежат ниже экспериментальных данных. Фит с Моделью № 4 отличается тем, что фаза $\phi_{\rho 1700}$ являлась свободным параметром. Полученное значение $\phi_{\rho 1700} = -1.1 \pm 0.4$ больше близко к нулю, чем к π .

Фит с Моделью №5 рассматривает также вклад следующего возбужденного состояния, условно названного как ρ''' . Диапазон аппроксимации при этом увеличен до 2.2 ГэВ. Результат фита показан на рисунке 2.39 жирной линией синего цвета, а также в таблице 8. Полученные масса $m_{\rho'''} = 2.03 \pm 0.05$ ГэВ и ширина $\Gamma_{\rho'''} = 0.42 \pm 0.09$ ГэВ не позволяют однозначно связать вклад ρ''' с состояниями $\rho(1900)$ и $\rho(2150)$, приведенными в таблицах PDG [53]. Так, PDG значения массы и ширины $\rho(1900)$ находятся в диапазонах 1.870–1.910 ГэВ и 0.109–0.410 ГэВ, соответственно, в то время как масса и ширина $\rho(2150)$ варьируются в областях 1.990–2.254 ГэВ и 0.010–0.160 ГэВ, соответственно. По всей

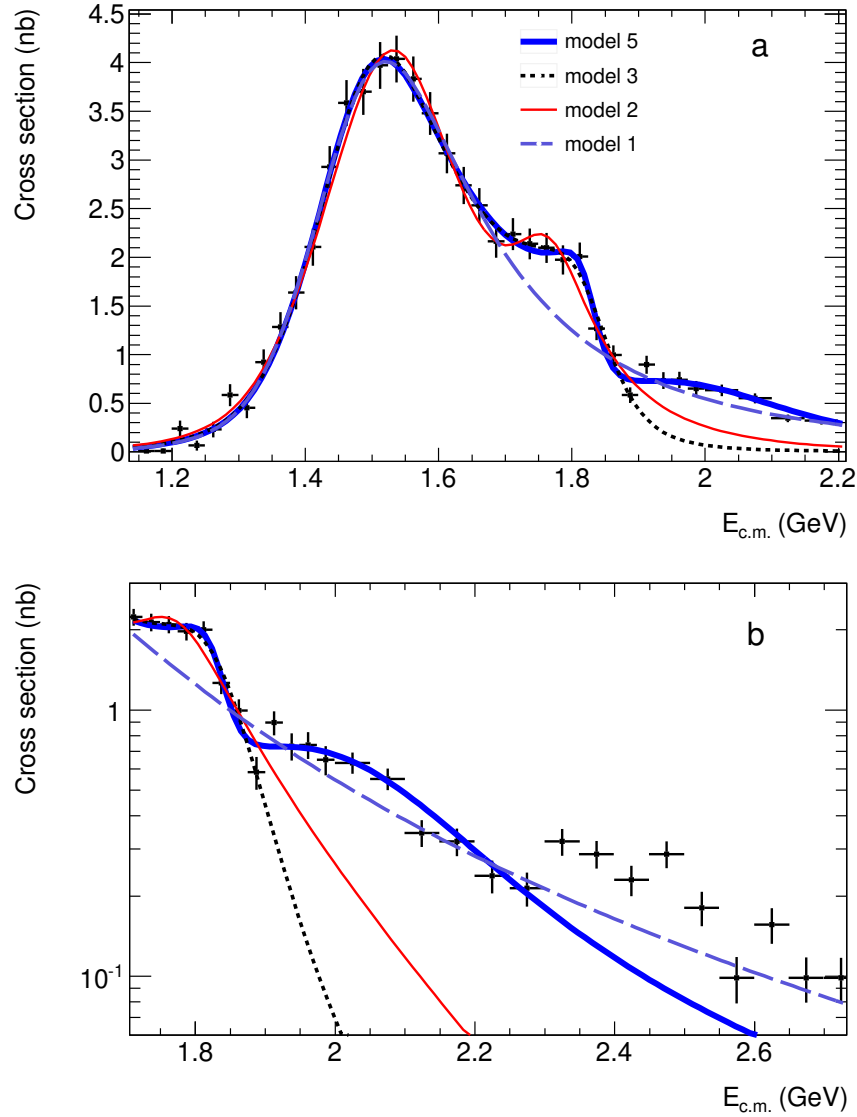


Рис. 2.39 — Измеренное сечение процесса $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$ аппроксимированное различными комбинациями промежуточных резонансов.

видимости, рассмотренный четвертый резонанс отражает в фите сумму вкладов состояний $\rho(1900)$ и $\rho(2150)$.

Фит с Моделью №6 основан на комбинации данных, полученных в данной работе и в предыдущем исследовании *BABAR* в другой моде распада $\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$. Однако, как видно из таблицы, точность определения параметров не улучшается при включении предыдущих данных. Видно, что модель с четырьмя промежуточными резонансами описывает экспериментальные данные сечения $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$ вплоть до $E_{\text{c.m.}} = 2.3$ ГэВ.

Нужно отметить, что при минимизации функции χ^2 (2.12) могли быть пропущены дополнительные минимумы. Во избежание этого, начальные значения параметров варьировались и отбирался именно тот минимум, который со-

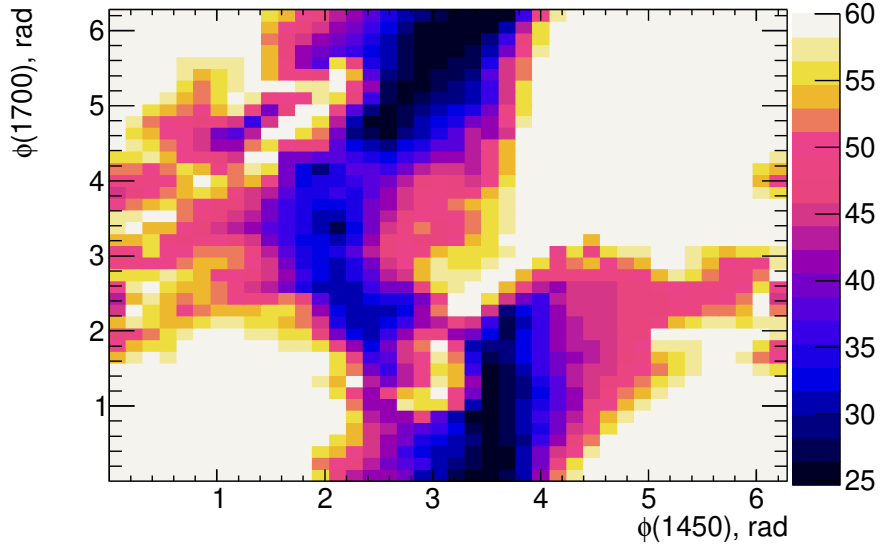


Рис. 2.40 — Значения χ^2 как функция фиксированных фаз $\phi_{\rho(1450)}$ и $\phi_{\rho(1700)}$.

ответствует минимальному значению χ^2 . Также для демонстрации положений локальных минимумов аппроксимация с Моделью №5 повторялась при фиксированных значениях фаз $\phi_{\rho(1450)}$ и $\phi_{\rho(1700)}$. Значения χ^2 как функция фиксированных фаз показаны на рисунке 2.40. Видно, что минимум χ^2 принадлежит области возле $\phi_{\rho(1450)} = \pi$ и $\phi_{\rho(1700)} = 0$.



Скачок в сечении в районе 1.9 ГэВ на рисунке 2.39 возможно связан с пороговым эффектом ввиду открытия канала рождения пары нуклонов. Подобный эффект также наблюдается в других процессах, например, $e^+e^- \rightarrow 3(\pi^+\pi^-)$, $2(\pi^+\pi^-\pi^0)$ и $K^+K^-\pi^+\pi^-$ [47, 48, 49, 50]. Скачок в сечении в области 2.3 ГэВ связан с деструктивной интерференцией с дополнительным изовекторным резонансом с параметрами $M_R = 2232 \pm 8 \pm 9$ МэВ/ c^2 и $\Gamma_R = 133 \pm 14 \pm 4$ МэВ [51].

Аппроксимация сечения была также произведена в несколько другой параметризации, где параметр g_V заменен на произведение

$$\Gamma(V \rightarrow e^+e^-)\mathcal{B}(V \rightarrow \eta\pi^+\pi^-) = \frac{\alpha^2 |g_V|^2 m_V}{9\pi \Gamma_V} G(m_V^2). \quad (2.13)$$

Из аппроксимации с Моделью №3 получены следующие значения:

$$\begin{aligned} \Gamma(\rho(1450) \rightarrow e^+e^-)\mathcal{B}(\rho(1450) \rightarrow \eta\pi^+\pi^-) &= \\ 210 \pm 24_{stat} \pm 10_{syst} \text{ eV} & \\ \Gamma(\rho(1700) \rightarrow e^+e^-)\mathcal{B}(\rho(1700) \rightarrow \eta\pi^+\pi^-) &= \\ 84 \pm 26_{stat} \pm 4_{syst} \text{ eV} & \end{aligned} \quad (2.14)$$

Модельная неопределенность приведенных выше параметров обусловлена, главным образом, сильным перекрытием амплитуд. Рассмотрев фиты с различными моделями, возможная модельная ошибка оценена как 15% и 80% для $\rho(1450)$ и $\rho(1700)$, соответственно. Полученное значение $g_\rho = 1.7 \pm 0.3 \text{ ГэВ}^{-1}$ для Модели 5 согласуется с оценкой в рамках МВД $1.57 \pm 0.07 \text{ ГэВ}^{-1}$, основанной на измерении парциальной ширины распада $\rho(770) \rightarrow \eta\gamma$ [53].

Сечение $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$ в диапазоне энергий $E_{\text{с.м.}} = 3.0 \div 3.5 \text{ ГэВ}$ измерено в этой работе впервые, как представлено на справа рисунке 2.38. Диапазон (3.05–3.15 ГэВ) вблизи J/ψ резонанса исключен и будет рассмотрен ниже вместе с экспериментальными точками сечения ниже J/ψ и две точки выше были аппроксимированы линейной функцией как показано красной линией справа на рисунке 2.38. Из данного фита получено следующее значение нерезонансного сечения при $E_{\text{с.м.}} = 3.1 \text{ ГэВ}$ $\sigma_{NR} = 0.047 \pm 0.008_{\text{stat}} \pm 0.005_{\text{syst}}$ нб.

Необходимо также коснуться вопроса о влиянии детекторного разрешения в восстановлении значения $m_{2\pi\eta}$ на результат аппроксимации сечения. Корректная процедура фитирования может быть выполнена, как минимум, двумя разными способами. Первый способ похож на тот, что был использован выше. Однако в функции χ^2 (2.12) произведен учет лишь диагональных значений матрицы ошибок сечения, вместо учета всей матрицы. Второй способ основан на аппроксимации видимого сечения вместо борновского, где первое отличается от второго заменой в выражении (2.7) $(dN/dm)_{\text{corr}}$ на dN/dm , значения которых указаны в таблице 6. Действительно, видимое сечение флуктуирует независимо в каждом бине $m_{2\pi\eta}$, поэтому в этом варианте не возникает недиагональных элементов в функции минимизации. Однако, здесь вместо функции $\sigma^{\text{model}}(s)$ нужно использовать ее свертку с разрешением $\int \sigma^{\text{model}}(s') \cdot p(s-s')$, где $p(s-s')$ - функция отклика детектора, показанная на рисунке 2.37 и нормированная на единицу. Первый и второй способы приводят к практически идентичным значениям параметров модели. Кроме того, разница амплитуд моделей ($\sigma^{\text{model}}(s)$), полученных первым и вторым способом, показана на рисунке 2.41 и составляет меньше чем 0.02 нб, т.е. несущественна.

Сравнение полученных в данной работе значений сечения с результатами других наиболее точных экспериментов показано на рисунке 2.42. Область, закрашенная розовым цветом, показывает величину систематической ошибки, приведенной в таблице 5. Верхние рисунки демонстрируют сравнение с новосибирскими измерениями на детекторах КМД-3 (слева) и СНД (справа). Заметно

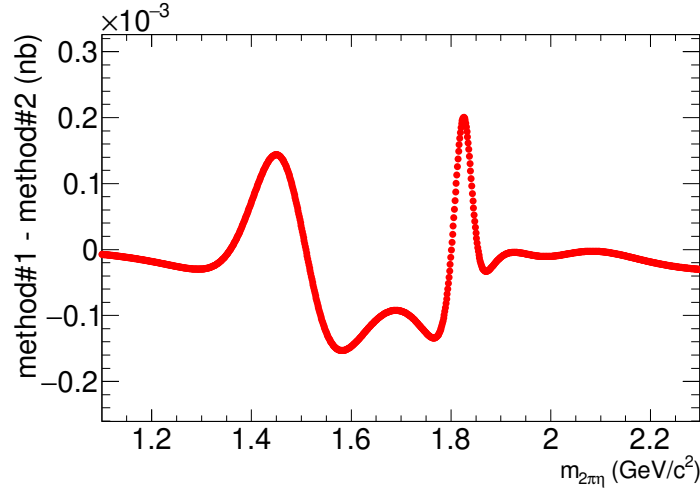



Рис. 2.41 — Разница моделей ($\sigma^{model}(s)$), полученных при аппроксимации сечений, полученных при помощи $(dN/dm)_{corr}$ и dN/dm .

расхождение с данными КМД-3 и СНД в области $\sqrt{s} = 1.55$ ГэВ, а также с данными КМД-3 в области выше 1.85 ГэВ. Систематическая ошибка измерений КМД-3 и СНД в области 1.55 ГэВ составляет 6%, поэтому расхождение не противоречит заявленным ошибкам. Нижние рисунки 2.42 показывают сравнение с измерениями на детекторе *BABAR* в разных модах распада η -мезона. Видно хорошее согласие  измерений *BABAR*.

2.8 Проверка гипотезы о сохранении векторно тока

Гипотеза о сохранении векторно тока (CVC) и изоспиновая симметрия позволяют связать сечение изучаемой реакции $e^+e^- \rightarrow \rho^{0(')} \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$ с вероятностью распада $\tau^- \rightarrow \rho^{-(')} \nu_\tau \rightarrow \pi^-\pi^0\eta\nu_\tau$ [45]. Вероятность распада τ -лептона может быть представлена в виде:

$$\frac{\mathcal{B}(\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0 \eta \nu_\tau)}{\mathcal{B}(\tau^\pm \rightarrow e^\pm \bar{\nu}_e \nu_\tau)} = \int_{(2m_\pi + m_\eta)^2}^{m_\tau^2} dq^2 \cdot \quad (2.15)$$

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta}^{I=1}(q^2) \frac{3|V_{ud}|^2 S_{EW}}{\pi^+\pi^-\alpha^2} \frac{q^2}{m_\tau^2} \left(1 - \frac{q^2}{m_\tau^2}\right)^2 \left(1 + 2\frac{q^2}{m_\tau^2}\right),$$

где q^2 - инвариантная масса системы $\pi^\pm \pi^0 \eta$; G_F - константа Ферми; $|V_{ud}|$ - соответствующий элемент СКМ матрицы; $S_{EW} = 1.0194$ - фактор, учитывающий электрослабые радиационные поправки. Для вычислений были использованы

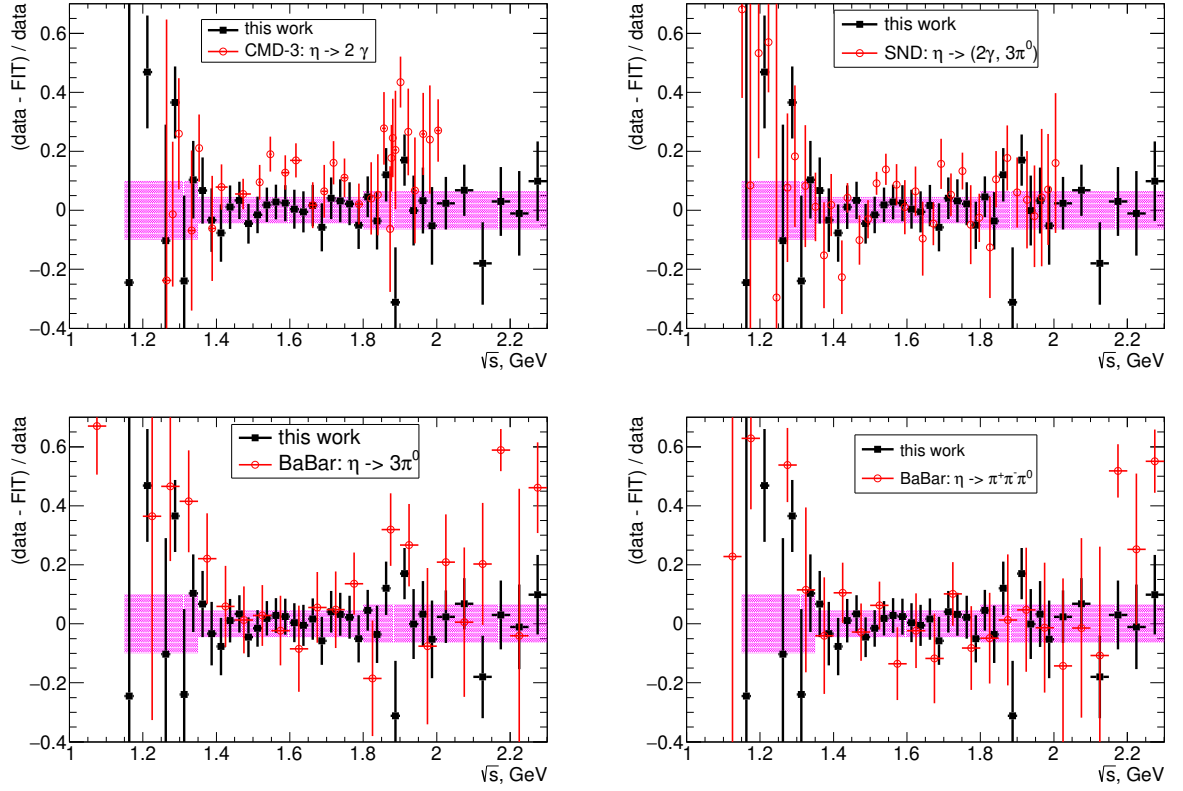


Рис. 2.42 — Сравнение сечений сигнального процесса с различных экспериментах с полученной моделью.

следующие табличные значения [53]: $m_\tau = 1.77682 \text{ ГэВ}/c^2$, $\mathcal{B}(\tau^\pm \rightarrow e^\pm \bar{\nu}_e \nu_\tau) = 17.83\%$, $V_{ud} = 0.9742$.

Для интегрирования выражения (2.16) используется модель $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta(q^2)$, обсужденная в предыдущей главе 2.7. Численно получаются следующие результаты:

$$\begin{aligned}
 B_{m_{\pi^+\pi^-\eta} < 1.15}^{\tau^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta} &= 0.00083\%, \\
 B_{1.15 < m_{\pi^+\pi^-\eta} < 1.35}^{\tau^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta} &= 0.0147 \pm 0.0015 \pm 0.0015\%, \\
 B_{1.35 < m_{\pi^+\pi^-\eta} < m_\tau}^{\tau^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta} &= 0.1460 \pm 0.00245 \pm 0.0065\%, \\
 \mathcal{B}(\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0 \eta \nu_\tau) &= (0.1616 \pm 0.0026_{stat} \pm \\
 &0.0080_{syst} \pm 0.0011_{model})\% = (0.162 \pm 0.009)\%,
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

где первая ошибка - статистическая, вторая - систематическая, подсчитанная в соответствии с Таблицей 5. Модельная ошибка соответствует разнице результатов, при подсчете которых использовались разные модели для зависимости сечения от q^2 (см. главу 2.7).

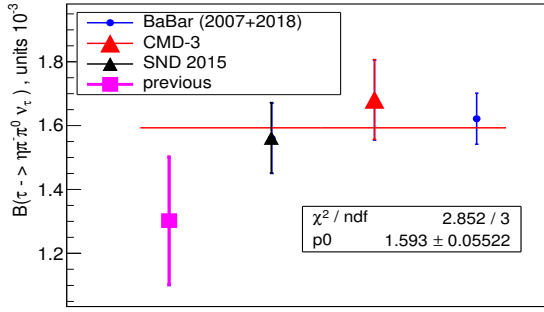


Рис. 2.43 — Сравнение CVC предсказаний для $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \eta \nu_\tau$ на основе различных измерений сечения $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^- \eta$.

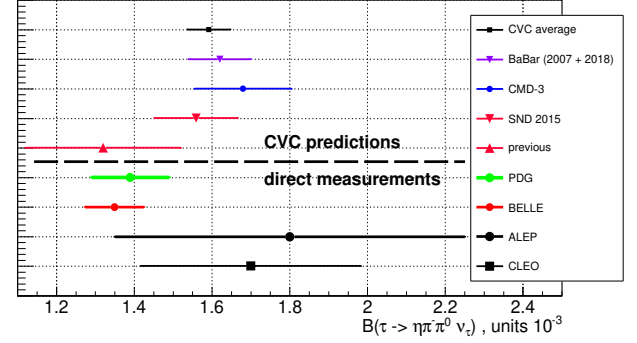


Рис. 2.44 — Сравнение CVC предсказаний для $\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \eta \nu_\tau$ с прямыми измерениями.

Расчет CVC предсказания для вероятности распада τ -лептона на основе предыдущего исследования с детектором BaBar в моде $\pi^+ \pi^- \eta \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+ \pi^- \pi^0$ [?] приводит к следующему результату: $\mathcal{B}(\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0 \eta \nu_\tau) = (0.1695 \pm 0.0085_{stat} \pm 0.0136_{syst})\%$, где часть систематической ошибки идентична той, что представлена в выражении 2.16, т.е. новому измерению. Рядом с такими источниками систематической ошибки как неопределенности в светимости, в эффективности реконструкции треков и фотонов, радиационных поправках, и триггере. Вклад перечисленных источников составляет 3%. Другие источники систематики из-за вычитания фона и аппроксимации спектров статистически независимы в старом и новом измерении могут быть усреднены. Объединяя оба результата получается: $\mathcal{B}(\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0 \eta \nu_\tau) = (0.163 \pm 0.008)\%$. Это значение сравнено с другими предсказаниями на Рис. 2.43. Где маркер "previous" соответствует предсказанию [46] на основе данных до 2000 г. работе. Среднее значение всех предсказаний равно $\bar{B} = (0.1593 \pm 0.0055)\%$.

Наиболее точное прямое измерение было выполнено с детектором Belle: $\mathcal{B}(\tau^- \rightarrow \pi^- \pi^0 \eta \nu_\tau) = (0.135 \pm 0.003 \pm 0.007)\%$, которое меньше чем \bar{B} на 2.7 стандартных отклонения. Кроме того, прямое измерение менее точно чем усредненное CVC предсказание. Сравнение всех прямых измерений с предсказаниями представлено на Рис. 2.44.

Отличие предсказаний от прямых измерений может означать, что достигнут уровень точности, соответствующий поправкам на нарушение изоспиновой симметрии, что не учтено в использованной CVC модели.

2.9 Вклад в аномальный магнитный момент мюона a_μ

Используя полученные результаты по измерению сечения процесса $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$, можно определить вклад данной реакции в величину аномального магнитного момента мюона a_μ . Данный вклад определялся при $m_{\pi^+\pi^-\eta} < 1.8 \text{ ГэВ}/c^2$ с помощью дисперсионного интеграла:

$$\begin{aligned} a_\mu^{\pi^+\pi^-\eta} &= \left(\frac{\alpha m_\mu}{3\pi} \right)^2 \int_{thr}^{(1.8 \text{ ГэВ})^2} \frac{ds}{s^2} K(s) \times \frac{\sigma(\pi^+\pi^-\eta) \cdot |1 - \Pi(s)|^2}{\sigma_0(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \\ &= (1.185 \pm 0.019_{\text{stat}} \pm 0.058_{\text{syst}} \pm 0.002_{\text{VP}}) \times 10^{-10} = (1.185 \pm 0.061) \times 10^{-10}, \\ K(s) &= \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{x^2 + (s/m_\mu^2)(1-x)}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

где фактор $|1 - \Pi(s)|^2$ вычитает эффект лептонной и адронной поляризации вакуума (VP), борновское сечение $\sigma_0(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$. Первая ошибка статистическая, вторая соответствует систематической неопределенности в $\sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta)$ и третья ошибка соответствует неопределенности в VP (0.2% [54]). Интегрирование (2.17) проводилось, используя МВД модель для энергетической зависимости сечения, как обсуждалось выше. Для минимизации модельной ошибки отдельно трапецеидальным методом вычисляется вклад от разницы между точками сечений и кривой модели.

Полученное значение согласуется с величиной $a_\mu^{\text{Davier}}(\pi^+\pi^-\eta) = (1.15 \pm 0.10) \times 10^{-10}$, полученной в 2011 году в работе [21]. На данный момент существует несколько сравнительно новых измерений, упомянутых во введении, поэтому вклад изучаемого канала в поляризационный оператор может быть определен с еще более высокой точностью.

2.10 Распад $J/\psi \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$

Спектр сигнальных событий в области массы J/ψ представлен на рисунке 2.45 (слева) и аппроксимирован суммой сигнального и фонового профиля. Сигнальный профиль зафиксирован из моделирования, а фон предполагается линейным. Фит приводит к результату $N_{J/\psi \rightarrow \pi^+\pi^-\eta} = 49 \pm 9$. Через полученное

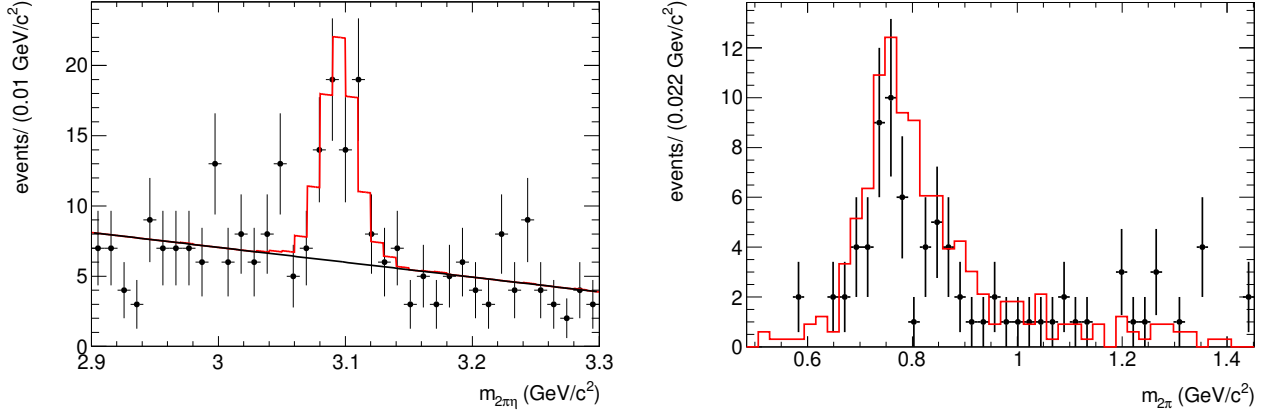


Рис. 2.45 — Спектр инвариантной массы $\pi^+\pi^-\eta$ (слева) и $\pi^+\pi^-$ (справа) в области масс J/ψ -мезона.

значение числа сигнальных событий определяется следующее произведение:

$$\Gamma_{J/\psi \rightarrow e^+e^-} B_{J/\psi \rightarrow \pi^+\pi^-\eta} = \frac{N_{J/\psi \rightarrow \pi^+\pi^-\eta} \cdot m_{J/\psi}^2}{6\pi^2 \cdot dL/dE \cdot \varepsilon(m_{J/\psi})} = (2.34 \pm 0.43_{stat} \pm 0.16_{syst}) \text{ eV}. \quad (2.18)$$

Используя PDG табличное значение для ширины распада J/ψ на электро-позитронную пару (5.55 ± 0.14 эВ [53]), можно определить значение вероятности распада

$$\mathcal{B}(J/\psi \rightarrow \pi^+\pi^-\eta) = (0.042 \pm 0.008)\%, \quad (2.19)$$

которое превосходит по точности предыдущее измерение *BABAR*: $B_{J/\psi \rightarrow \pi^+\pi^-\eta} = (0.040 \pm 0.017)\%$ [53].

Рисунок 2.45 (справа) показывает распределение по инвариантной массе двух пионов в диапазоне $3.05 < m_{\pi^+\pi^-} < 3.15$ ГэВ/с². Также для подавления фоновых процессов события на правом рисунке 2.45 удовлетворяют дополнительному требованию $|m_{2\gamma} - m_\eta| < 0.03$ ГэВ/с². Точки с ошибками демонстрируют эксперимент, гистограмма - моделирование. В последнем, как обсуждалось, заложена модель рождения сигнальных событий через промежуточное состояние $\rho(770)\eta$. Отличие в спектре масс $\pi^+\pi^-$ может быть объяснена вкладом изоскалярного состояния, что было наблюде-
но в предыдущих экспериментах [19, 20].

G-четность состояния $\pi^+\pi^-\eta$ равна +1, в то время как $G(J/\psi) = -1$. Следовательно, переход путем сильного взаимодействия J/ψ в сигнальное конечное состояние сильно подавлен. Однако, возможны электромагнитные переходы, не сохраняющие G-четность: $J/\psi \rightarrow \gamma^* \rightarrow \rho\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$ или $J/\psi \rightarrow \omega\eta \rightarrow \gamma^*\eta \rightarrow$

$\rho\eta \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$. Если предположить, что за пределами пика J/ψ резонанса основным промежуточным состоянием является $\rho(770)\eta$, то справедливо следующее соотношение:

$$\frac{\mathcal{B}(J/\psi \rightarrow \rho(770)\eta)}{\mathcal{B}(J/\psi \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \frac{\sigma_c(e^+e^- \rightarrow \rho(770)\eta)}{\sigma_c(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}, \quad (2.20)$$

где σ_c - сечение изучаемого процесса в континууме, т.е. не резонансная подложка, при $\sqrt{s} = m_{J/\psi}$, $\sigma_c(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3m_{J/\psi}^2}$. Сечение $e^+e^- \rightarrow \rho(770)\eta$ в континууме определяется путем линейной интерполяции четырех точек измеренное в данной работе сечения в области $m_{J/\psi}$, где две точки лежат ниже 3.05 ГэВ/с² и две выше 3.15 ГэВ/с²:

$$\sigma_c(e^+e^- \rightarrow \rho(770)\eta) = (47 \pm 8_{\text{stat}} \pm 5_{\text{syst}})\text{pb}. \quad (2.21)$$

Подставляя это значение в выражение (2.20) приводит к следующему

$$\begin{aligned} B(J/\psi \rightarrow \rho(770)\eta) &= \frac{3m_{J/\psi}^2}{4\pi\alpha^2} \mathcal{B}(J/\psi \rightarrow \mu^+\mu^-) \\ &\times \sigma_c(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta) = (3.1 \pm 0.6) \times 10^{-4}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Полученное значение находится в статистическом согласии со значением PDG [53] $B_{J/\psi \rightarrow \rho\eta} = (1.9 \pm 0.2) \times 10^{-4}$.

Глава 3. Измерение переходного форм-фактора $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \eta'$

В данной работе выполнено измерение форм-фактора η' -мезона ($F_{\eta'}$) в широком диапазоне квадратов импульсов фотонов. Главной целью этой работы является изучение $F_{\eta'}$ в дважды виртуальной области. До настоящей работы эта кинематическая область форм-фактора всех псевдоскалярных мезонов не была подвергнута экспериментальному изучению ввиду малого сечения.

3.1 Вступление

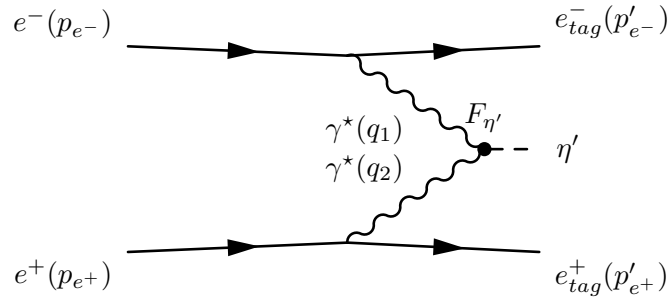


Рис. 3.1 — Фейнмановская диаграмма процесса $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\eta'$.

Здесь переходный форм-фактор η' -мезона (ПФФ) изучается с помощью следующей реакции, изображенной на рисунке 3.1:

$$e^+e^- \rightarrow e^+e^-\eta'$$

Как уже было упомянуто в выражении (1) ПФФ определен как функция от передачи импульсов фотонов при амплитуде взаимодействия псевдоскалярного поля с фотонами ($\gamma^*\gamma^* \rightarrow \eta'$):

$$T = -i4\pi\alpha\epsilon_{\mu\nu\beta\gamma}\epsilon_1^\mu\epsilon_2^\nu q_1^\beta q_2^\gamma F_{\eta'}(Q_1^2, Q_2^2).$$

Дифференциальное сечение процесса $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\eta'$ измерено в дважды таггированной моде, когда каждый рассеянный электрон¹ задетектирован (таггирован). Таггированный электрон излучает виртуальный фотон с передачей

¹ в нижеследующем описании термин "электрон" используется одновременно и для электрона и позитрона.

импульса: $q_{e+}^2 = -Q_{e+}^2 = (p_{e+} - p'_{e+})^2$ и $q_{e-}^2 = -Q_{e-}^2 = (p_{e-} - p'_{e-})^2$, где $p_{e\pm}$ и $p'_{e\pm}$ - четырех-импульсы начальных и конечных электронов, соответственно. В данной работе был измерен $F_{\eta'}(Q_1^2, Q_2^2)$ в кинематическом диапазоне виртуальностей фотонов $2 < Q_1^2, Q_2^2 < 60$ ГэВ².

Существует множество теоретических предсказаний динамики ПФФ псевдоскалярных мезонов ($F_P(Q_1^2, 0)$ и $F_P(Q_1^2, Q_2^2)$) в зависимости от передачи импульсов фотонами (см., например, работы [63, 60, 62, 61]). Измерение ПФФ при больших Q_1^2 и Q_2^2 позволяет проверить модели в рамках пКХД и МВД [64, 66, 65]. Древесные Фейнмановские диаграммы для этих моделей представлены на рисунке 3.2. В случае, когда лишь один фотон находится вне массовой поверхности, согласно обеим моделям асимптотическое поведение $F_P(Q^2, 0) \sim 1/Q^2$ при $Q^2 \rightarrow \infty$. Однако, если оба фотона виртуальные ($Q_{1,2} \gg 0$), асимптотические предсказания пКХД и МВД моделей разнятся, а именно $F(Q_1^2, Q_2^2) \sim 1/(Q_1^2 + Q_2^2)$ для пКХД и $F(Q_1^2, Q_2^2) \sim 1/(Q_1^2 Q_2^2)$ для МВД.

3.2 Теоретические представления ПФФ $F_{\eta'}(Q_1^2, Q_2^2)$

Как следствие смешивания η - и η' -мезонов, волновая функция η' может быть представлена как суперпозиция двух-кварковых состояний [67]:

$$|\eta'\rangle = \sin \phi |n\rangle + \cos \phi |s\rangle, \quad (3.1)$$

где

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\bar{u}u\rangle + |\bar{d}d\rangle), \quad |s\rangle = |\bar{s}s\rangle. \quad (3.2)$$

К качестве значения ϕ используется значение $\phi = (37.7 \pm 0.7)^\circ$ [68], определенное с помощью аппроксимации зависимостей $F_\eta(Q^2, 0)$ и $F_{\eta'}(Q^2, 0)$. Из (3.1) ПФФ η' -мезона связан с форм-факторами состояний $|n\rangle$ и $|s\rangle$ как:

$$F_{\eta'} = \sin \phi F_n + \cos \phi F_s. \quad (3.3)$$

При больших значениях виртуальности фотона пКХД предсказывает, что F_n и F_s могут быть представлены как свертка амплитуды жесткого рассеяния T_H и непертурбативной амплитуды распределения $\phi_{n,s}$:

$$F_{n,s}(Q_1^2, Q_2^2) = \int_0^1 T_H(x, Q_1^2, Q_2^2, \mu) \phi_{n,s}(x, \mu) dx, \quad (3.4)$$

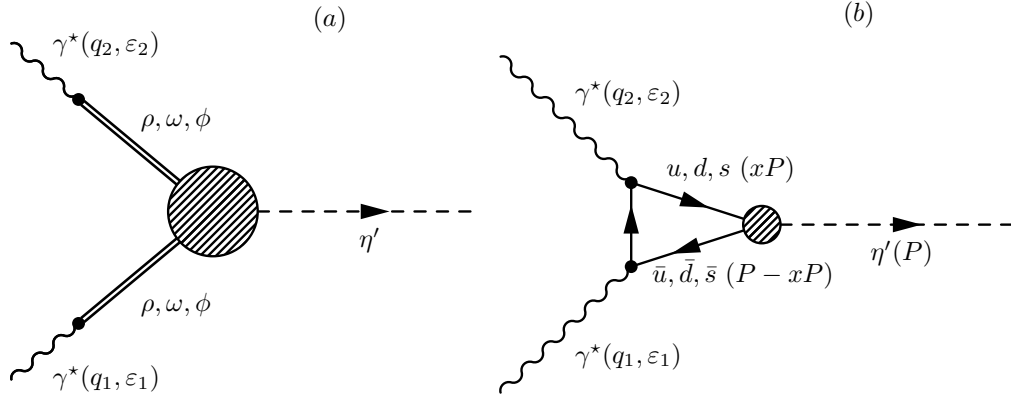


Рис. 3.2 — Диаграмма Фейнмана для процесса $\gamma^* \gamma^* \rightarrow \eta'$ в рамках МБД (а) и пКХД (b).

где x - часть продольного момента импульса мезона, переносимого кварком, участвующем в жестком рассеянии на виртуальном фотоне. В качестве масштаба перенормировки μ , используется значение $\mu^2 = Q^2 = Q_1^2 + Q_2^2$, как предложено в работе [69], для асимптотических форм $\phi_{n,s}$ используется выражение из статьи [70]

$$\phi_{n,s} = 2C_{n,s}f_{n,s}6x(1-x) \left(1 + O(\Lambda_{QCD}^2/\mu^2)\right), \quad (3.5)$$

где зарядовые факторы $C_n = 5/(9\sqrt{2})$ и $C_s = 1/9$, константа слабого распада для состояний $|n\rangle$ и $|s\rangle$ равны $f_n = (1.08 \pm 0.04)f_\pi$ и $f_s = (1.25 \pm 0.08)f_\pi$ [68], $f_\pi = 130.4 \pm 0.2$ МэВ - константа распада пиона, и Λ_{QCD} - параметр масштаба КХД.

В случае, когда оба фотона находятся вне массовой поверхности, $T_H(x, Q_1^2, Q_2^2)$ может быть представлена в виде

$$T_H(x, Q_1^2, Q_2^2) = \frac{1}{2xQ_1^2 + (1-x)Q_2^2} \cdot \left(1 + C_F \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} t(x, Q_1^2, Q_2^2)\right) + (x \rightarrow 1-x) + O(\alpha_s^2) + O(\Lambda_{QCD}^4/Q^4), \quad (3.6)$$

где $(x \rightarrow 1-x)$ означает замену x в первом слагаемом на $1-x$ во втором, $\alpha_s(\mu^2)$ - постоянная сильного взаимодействия, и цветовой фактор $C_F = (n_c^2 - 1)/(2n_c) = 4/3$. Главное приближение в формуле (3.6) соответствует случаю, когда $t(x, Q_1^2, Q_2^2) = 0$. Выражение для следующего за главным элементом (NLO) $t(x, Q_1^2, Q_2^2)$ может быть найдено, например, в работе [69]. Объединяя выражения (3.3 – 3.6) можно получить мастер формулу для пКХД предсказания ПФФ

$F_{\eta'}(Q_1^2, Q_2^2)$ при больших Q_1^2 и Q_2^2 в виде:

$$F_{\eta'}(Q_1^2, Q_2^2) = \left(\frac{5\sqrt{2}}{9} f_n \sin \phi + \frac{2}{9} f_s \cos \phi \right) \int_0^1 dx \frac{1}{2} \frac{6x(1-x)}{xQ_1^2 + (1-x)Q_2^2} \cdot \left(1 + C_F \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} t(x, Q_1^2, Q_2^2) \right) + (x \rightarrow 1-x). \quad (3.7)$$

Множество теоритических усилий было направлено на определение формы амплитуды распределения псевдоскалярных мезонов [69, 70, 72, 73, 71]. В отличие от случая, когда один фотон находится на массовой поверхности, ПФФ при двух виртуальных фотонах почти нечувствителен к форме амплитуды распределения, потому что амплитуда (3.6) регулярна при $x = 0$ и $x = 1$.

В соответствии с моделью МВД ПФФ выражается как:

$$F_{\eta'}(Q_1^2, Q_2^2) = \frac{F_{\eta'}(0,0)}{(1 + Q_1^2/\Lambda_P^2)(1 + Q_2^2/\Lambda_P^2)}, \quad (3.8)$$

где Λ_P - некоторый массовый параметр (см., например, [65]). В случае η' -мезона, Λ_P найден равным $846 \pm 3_{stat}$ МэВ/ c^2 из аппроксимации $F_{\eta'}(Q^2, 0)$, как показано на рисунке 0.4. Значение $F_{\eta'}(0,0)$ может быть определено из ширины двухфотонного распада η' -мезона $\Gamma_{\eta' \rightarrow 2\gamma} = 4.30 \pm 0.16$ кэВ [74], используя связь [70]:

$$F(0,0) = \sqrt{\frac{4\Gamma_{\eta' \rightarrow 2\gamma}}{\pi\alpha^2 m_{\eta'}^3}} = 0.342 \pm 0.006 \text{ GeV}^{-1}. \quad (3.9)$$

3.3 Моделирование двухфотонных процессов

Монте-Карло моделирование сигнального процесса $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\eta'$ производилось с помощью генератора GGResRc [78]. Ввиду того, что распределение по $Q_{e^-}^2, Q_{e^+}^2$ сильно пиковано в области малых значений, генерация событий производилась с требованием $Q_{e^-}^2(Q_{e^+}^2) > 2 \text{ ГэВ}^2$, чтобы эффективно моделировать события, реконструируемые детектором. Последнее требование примерно соответствует пределу геометрической эффективности регистрации таггированных электронов. ПФФ в моделировании заложен постоянным и равным $F(0,0) = 0.342 \text{ ГэВ}^{-1}$.

Генератор GGResRc учитывает радиационные поправки к борновскому сечению в главном (LO) и в следующем за главным (NLO) приближениях в

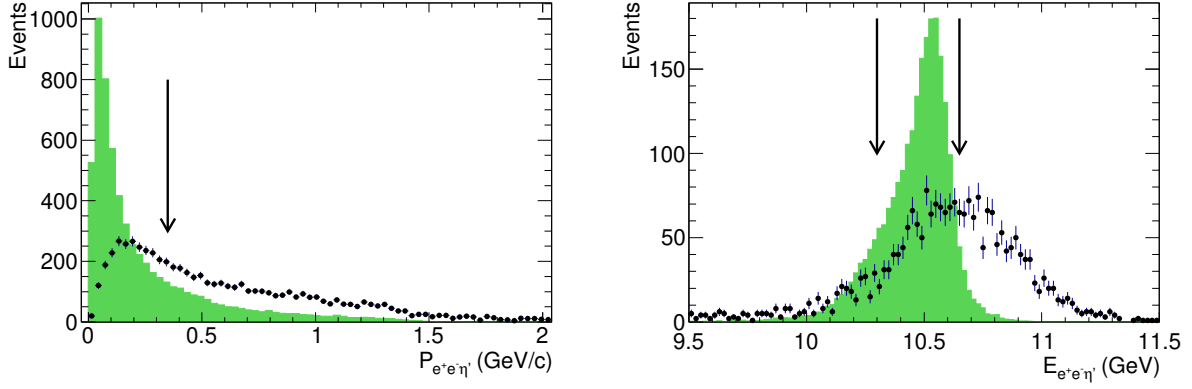


Рис. 3.3 — Распределение по полному импульсу (слева) и полной энергии (справа) системы $e^+e^-\eta'$ в с.ц.м.. Точки с ошибками демонстрируют экспериментальные спектры, закрашенные гистограммы - сигнальное моделирование. Количество событий в гистограммах моделирования нормировано на число событий в эксперименте. События с $P_{e^+e^-\eta'}^* < 0.35$ ГэВ/с, $E_{e^+e^-\eta'} < 10.3$ ГэВ и $E_{e^+e^-\eta'} > 10.65$ ГэВ, как показано стрелками, исключаются из дальнейшего анализа.

соответствии с источником [79]. В частности, производится генерация дополнительных фотонов, испущенных как начальными, так и рассеянными электронами. Максимально допустимая энергия в с.ц.м. для ISR фотонов составляет $0.05 \cdot \sqrt{s}$, где \sqrt{s} - суммарная энергия начальной e^+e^- пары в с.ц.м..

Суммарное число сгенерированных сигнальных событий $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\eta' \rightarrow e^+e^-\pi^+\pi^-\eta \rightarrow e^+e^-\pi^+\pi^-\gamma\gamma$ составило 194801. Полное сечение, подсчитанное в моделировании, составляет $(688 \pm 5) \times 10^{-5}$ нб в области $Q_1^2, Q_2^2 > 2$ ГэВ².

3.4 Отбор сигнальных событий

Цепочка распада $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta \rightarrow \pi^+\pi^-2\gamma$ используется для реконструкции η' -мезона, который в совокупности с зарегистрированными рассеянными электронами составляет сигнальное событие. При отборе событий-кандидатов выбираются те, которые содержат, как минимум, четыре реконструированных трека и два фотона. Требуется, чтобы треки проходили от места встречи в 2.5 см вдоль линии пучков и в 1.5 см в поперечной плоскости. Также требуется, чтобы поперечный импульс трека был больше 50 МэВ/с. Алгоритм разделения

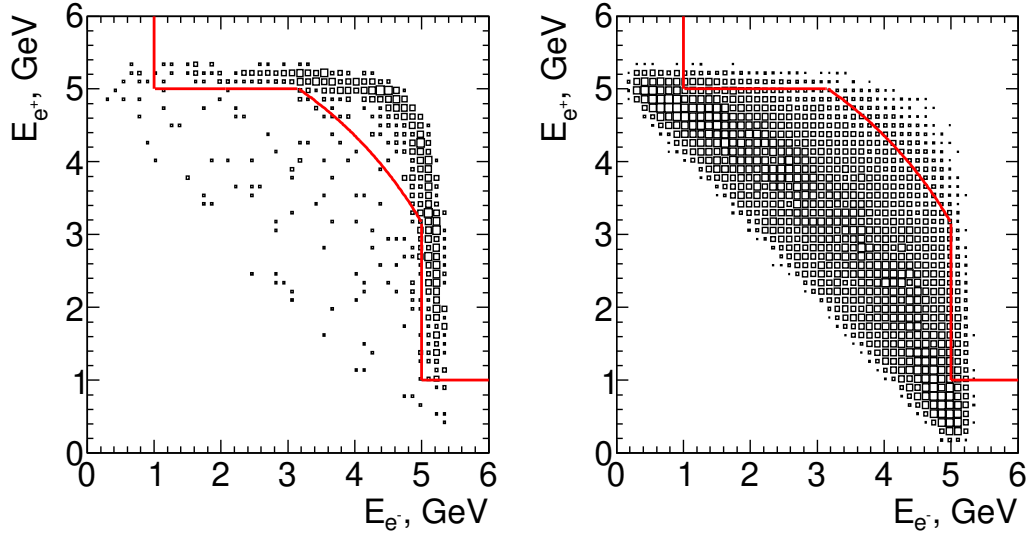


Рис. 3.4 — Распределение энергии кандидата в рассеянный электрон в зависимости от энергии кандидата в рассеянный позитрон для экспериментальных данных (слева) и моделирования сигнала (справа). События, лежащие выше и правее приведенной линии, исключаются из дальнейшего анализа.

электронов от пионов и от других частиц основан на информации с черенковского детектора, электромагнитного калориметра и трековой системы. Требуется, чтобы в каждом событии были найдены, как минимум, два электрона и два пиона. Эффективность электронной идентификации электронов превышает 98%, а пионов менее 10%. Эффективность пионной идентификации пионов составляет около 98%, а электронов около 7%.

Для восстановления части энергии электронов, потерянной ввиду тормозного излучения, энергия всех реконструированных электромагнитных ливней (в районе 35 и 50 мрад в полярном и азимутальном направлениях, соответственно) суммируется к реконструированной энергии электрона. Минимально допустимая энергия электронов составляет 0.2 ГэВ в с.ц.м..

Минимально разрешенная энергия кандидатов в фотоны составляет 30 МэВ. Пара фотонов образует кандидат в η -мезон, если инвариантная массы пары находится в диапазоне 0.45–0.65 ГэВ/ c^2 . Также фотоны подвержены кинематической реконструкции с требованием $m_{2\gamma} = m_\eta$, что позволяет уточнить значения их импульсов и углов. Кандидат в η' -мезон составляется из двух противоположно заряженных кандидатов в пионы и кандидата в η -мезон. Инвари-

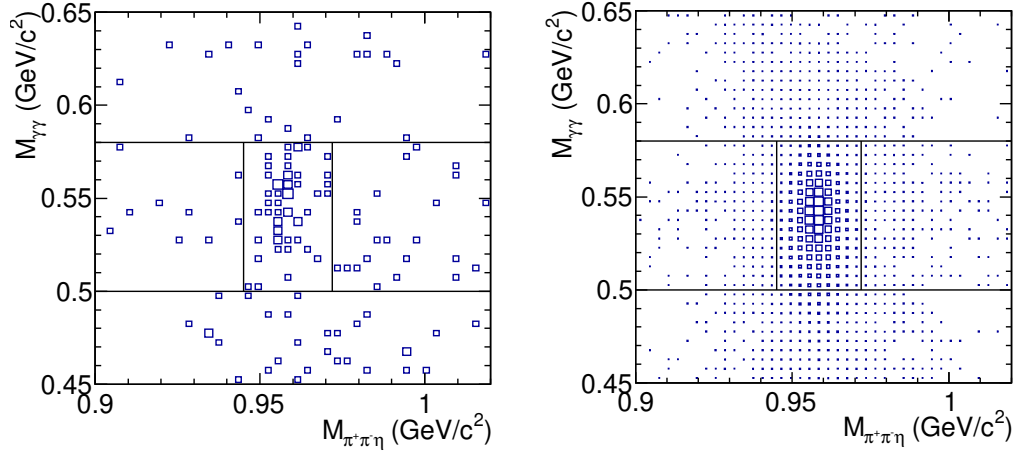


Рис. 3.5 — Спектр инвариантной массы η -кандидатов ($M_{\gamma\gamma}$) в зависимости от массы η' -кандидата ($M_{\pi^+\pi^-\eta}$) для экспериментальных данных (слева) и моделирования сигнальных событий (справа). Горизонтальные линии демонстрируют примененное условие отбора. Вертикальные линии отображают границы более "чистого" отбора сигнальных событий ($0.945 < M_{\pi^+\pi^-\eta} < 0.972$ ГэВ/ c^2).

антная масса кандидата в η' -мезон должна находиться в диапазоне 0.90–1.02 ГэВ/ c^2 .

Требуется, чтобы полный реконструированный импульс ($P_{e^+e^-\eta'}$) был меньше 0.35 ГэВ/ c , а полная энергия системы $e^+e^-\eta'$ находилась в диапазоне 10.30–10.65 ГэВ, как показано стрелками на рисунке 3.3. Следующее условие отбора, направленное на подавление событий процессов КЭД, связано с реконструированной энергией кандидатов в рассеянные электроны. Спектр энергий E_{e^+} в зависимости от E_{e^-} показан на рисунке 3.4 для экспериментальных событий (слева) и моделирования сигнала (справа). Линией показана граница, примененных условий отбора. События, лежащие правее и выше границы, исключаются из дальнейшего рассмотрения.

Спектр масс η -кандидата в зависимости от массы η' -кандидата для отобранных экспериментальных и смоделированных событий показан на рисунке 3.5. Группировка событий в области $m_{\eta'}$ по горизонтали и m_{η} по вертикали иллюстрирует искомые сигнальные события двухфотонного рождения η' -мезона. Для дальнейшего подавления фоновых событий требуется, чтобы инвариантная масса кандидата в η -мезон была в интервале значений 0.50–0.58 ГэВ/ c^2 , как показано горизонтальными линиями на рисунке 3.5.

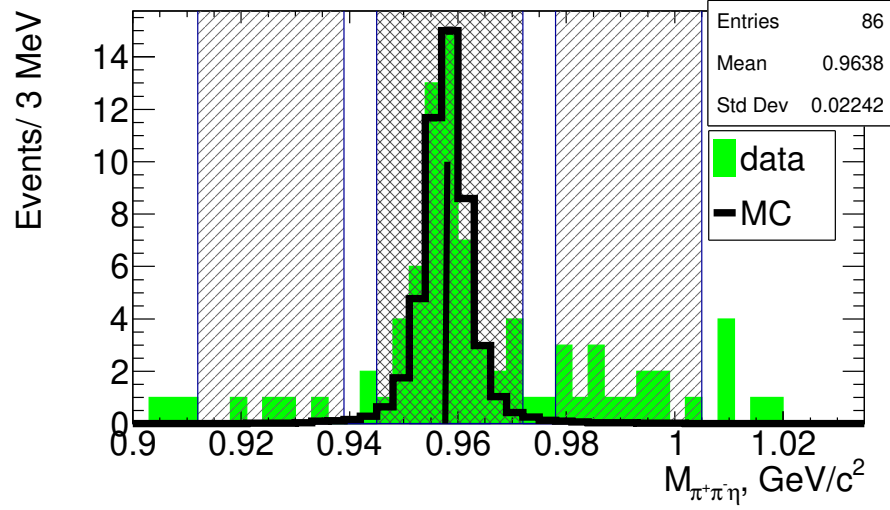


Рис. 3.6 — Спектр масс $\pi^+\pi^-\eta$ для кандидатов в сигнальные события. Открытая и закрашенные гистограммы отражают данные и сигнальное моделирование, соответственно. Накрест и под углом заштрихованные диапазоны обозначают "сигнальную" и "контрольную" области, соответственно. Вертикальная линия отражает значение массы m_η .

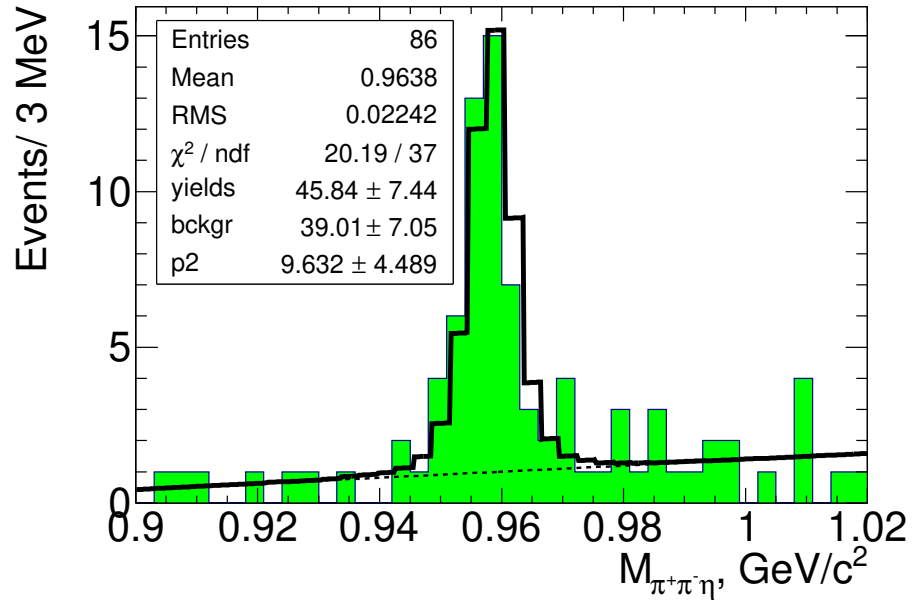


Рис. 3.7 — Спектр масс системы $\pi^+\pi^-\eta$ в области $2 < (Q_1^2, Q_2^2) < 60 \text{ ГэВ}^2$. Открытая гистограмма соответствует результату фита, пунктирная линия отражает вклад фона.

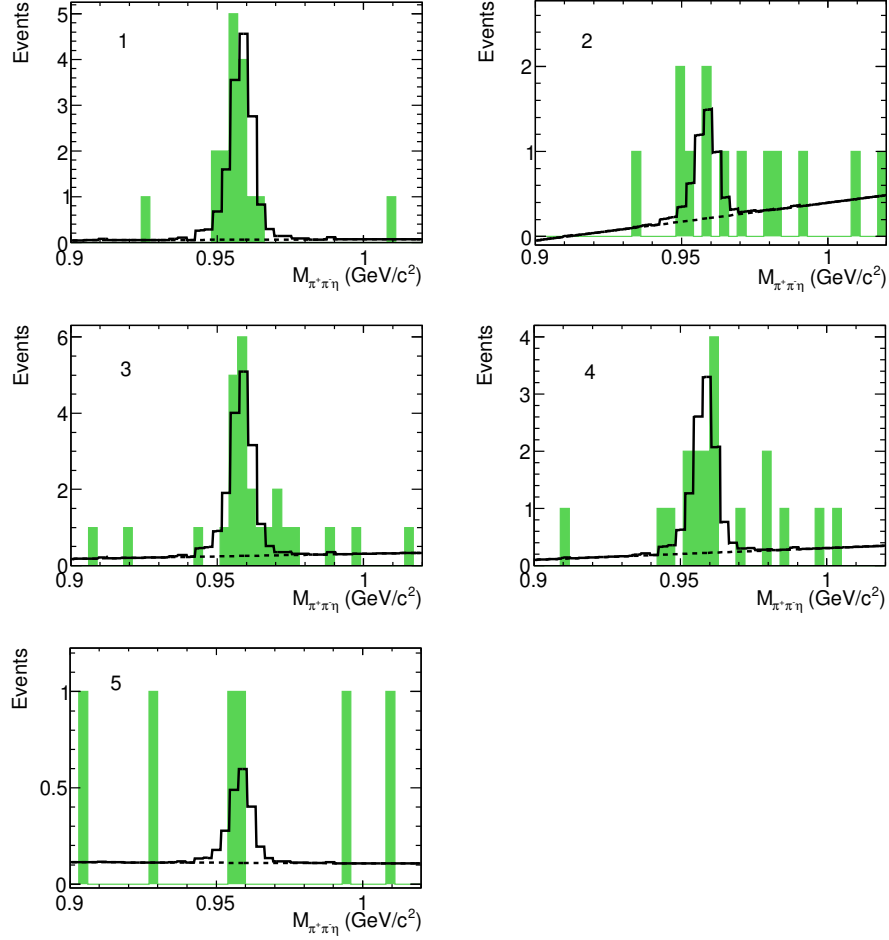


Рис. 3.8 — Спектр масс системы $\pi^+\pi^-\eta$ для пяти областей (Q_1^2, Q_2^2), обозначенных на рисунке 3.9 (закрашенная гистограмма). Открытая гистограмма отражает результат фита, пунктирная линия - вклад фона.

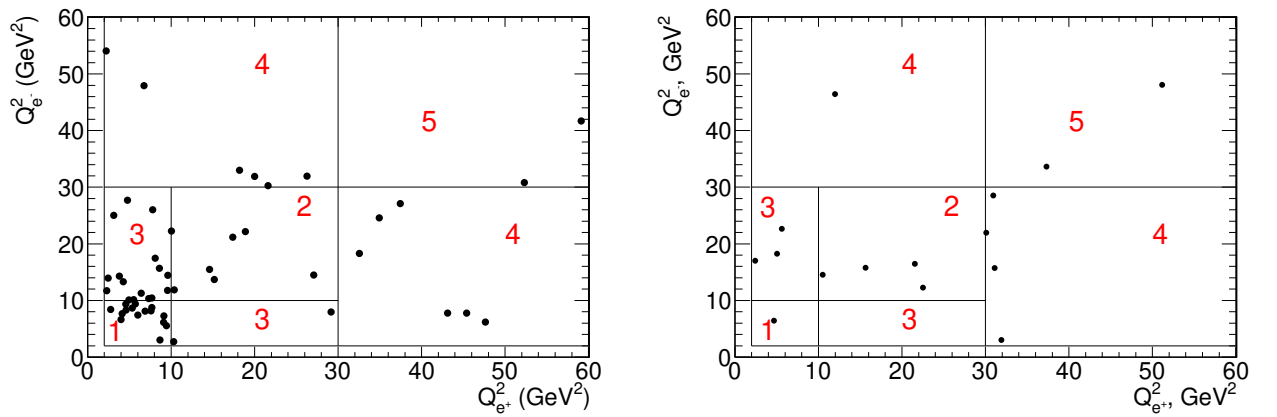


Рис. 3.9 — Спектр Q_{e-}^2 в зависимости от Q_{e+}^2 для экспериментальных событий из "сигнального" (слева) и "контрольного" (справа) диапазонов. Линии и цифры обозначают области, используемые для изучения динамики ПФФ.

В около 10% всех отобранных событий найдено более одного кандидата в η' -мезон или в рассеянный e^\pm . Для дальнейшего анализа выбран тот кандидат, который отвечает наименьшему значению полного импульса системы $e^+e^-\eta'$ в с.ц.м.. Согласно моделированию этот выбор в более чем 99.6% случаев из всех отобранных событий отвечает правильной комбинации кандидатов.

Итоговый спектр масс $\pi^+\pi^-\eta$ показан на рисунке 3.6. Закрашенная и открытая гистограммы демонстрируют экспериментальные и моделированные события, соответственно. Накрест и под углом заштрихованные диапазоны обозначают "сигнальную" и "контрольную" области, которые содержат 55 и 18 событий, соответственно. "Контрольная" область выбрана таким образом, чтобы она была больше "сигнальной" в два раза. Вертикальная линия показывает значение массы $m_{\eta'}$.

Если предположить, что профиль фона является линейным, то число искоемых событий можно оценить как разницу событий в сигнальной области минус половина от числа событий в контрольной области:

$$N_{signal} = (55 - 18/2) = 46 \quad (3.10)$$

Аппроксимация спектра $\pi^+\pi^-\eta$ представлена на рисунке 3.7. Функцией для фита служит сумма сигнального и фонового профилей, где первый извлечен из моделирования, в то время как профиль фона предположен линейным. Получилось 45.8 ± 7.4 сигнальных события, что согласуется с приведенной выше оценкой.

Все отобранные события были разделены на пять областей в плоскости $(Q_{e^-}^2, Q_{e^+}^2)$, как изображено на рисунке 3.9 для событий с $0.945 < M_{\pi^+\pi^-\eta} < 0.972$ ГэВ/с². Ввиду симметричности изучаемого процесса при замене e^- на e^+ , области №3 и №4 составлены из двух разделенных регионов симметричных относительно диагонали $Q_{e^-}^2 = Q_{e^+}^2$.

Количество сигнальных событий (N_{events}) в каждой области определено с помощью аппроксимации инвариантной массы $\pi^+\pi^-\eta$, как показано на рисунке 3.8. Профиль сигнальной функции извлечен из моделирования, в то время как профиль фона предположен линейным.

Определенные в пяти областях $(Q_{e^-}^2, Q_{e^+}^2)$ числа сигнальных событий приведены в Табл. 9. Полное число таких событий составляет $46.2^{+8.3}_{-7.0}$. Для областей №2 и №5 определены также верхние пределы для числа сигнальных событий на 90% уровне достоверности, используя метод Feldman-Cousins [80].

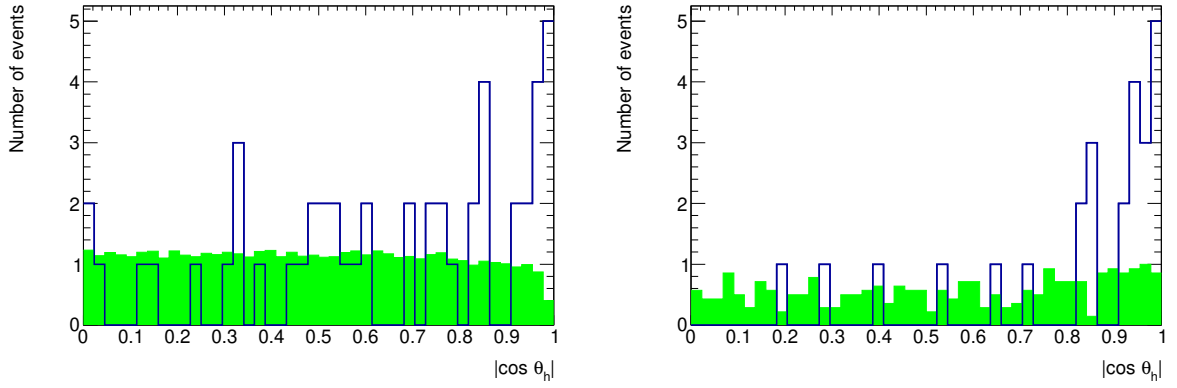


Рис. 3.10 — Спектр $|\cos \theta_h|$ для отобранных кандидатов в сигнальные события для "сигнальной" (слева) и "контрольной" (справа) областей. Открытая и закрашенная гистограммы соответствуют экспериментальным и моделированным событиям, соответственно.

Для оценки систематической неопределенности, связанной с описанием профиля фона, фиты спектров массы $\pi^+\pi^-\eta$ были повторены с использованием квадратичной функции в качестве профиля фона. Изменение в полном числе сигнальных событий составило 1.7%. Систематическая неопределенность в сигнальном профиле (3.3%) оценена путем включения в него сдвига ($\Delta M_{\pi^+\pi^-\eta} = -0.48 \text{ МэВ}/c^2$) и дополнительной Гауссовой размазки ($\sigma(M_{\pi^+\pi^-\eta}) = 1 \text{ МэВ}/c^2$), значения которых были определены в предыдущей работе с детектором *BABAR* по измерению ПФФ η' -мезона в single-tagged моде [59]. Суммарная систематическая неопределенность в числе сигнальных событий (3.7%) оценена как квадратичная сумма ошибок, связанных с профилями фона и сигнала.

Рисунок 3.10 демонстрирует распределение по $|\cos \theta_h|$, где θ_h - угол между импульсом фотона в системе покоя η -мезона и направлением движения η -мезона в с.ц.м.. Открытая и закрашенная гистограммы соответствуют отобранным экспериментальным и моделированным событиям, соответственно. Спектры моделирования нормированы на число событий в экспериментальных гистограммах. На генераторном уровне это распределение должно быть равномерным, ввиду того, что распад скалярной частицы на два фотона изотропен. Однако, моделированный спектр после отклика детектора имеет провал в области $|\cos \theta_h| \sim 1$, когда в системе покоя η -мезона один фотон движется по направлению мезона, а второй фотон против. Однако, значительная энергия η -мезона приводит, зачастую, к тому, что в лабораторной системе оба фотона из распада движутся

в одном направлении и их кластеры в калориметре сливаются, что приводит к снижению эффективности реконструкции фотонов. В экспериментальном же спектре виден пик в районе $|\cos \theta_h| \sim 1$, что связано с примесью фоновых событий, когда кандидат в η -мезон состоит из одного фотона с энергичным кластером и одного мягкого фотона, который обусловлен, например, шумом электроники. Фоновый пик, как и ожидается, значительно сильнее проявлен в событиях из "контрольной" области.

3.5 Пикованный фон

Вклады двухфотонных фоновых процессов $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\phi \rightarrow e^+e^-\eta'\gamma$ и $e^+e^- \rightarrow e^+e^-J/\psi \rightarrow e^+e^-\eta'\gamma$ изучались в предыдущем исследовании с детектором *BABAR* [59], где было заключено, что они пренебрежимы.

Другой двухфотонный процесс $e^+e^- \rightarrow \eta'\pi^0 e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta\pi^0 e^+e^-$ является самым близким к искомому сигнальному с кинематической точки зрения, что позволяет ожидать его значительный вклад в фон. Монте-Карло генерирование этого процесса производилось через механизм $e^+e^- \rightarrow e^+e^-a_0(1450) \rightarrow e^+e^-\eta'\pi^0$.

Процедура отбора событий $e^+e^- \rightarrow \eta'\pi^0 e^+e^-$ аналогична той, что использовалась при поиске сигнала. Дополнительным требованием выступает обязательное наличие в событии хотя бы пары фотонов с инвариантной массой в интервале 0.115–0.150 ГэВ/с², которые составляют кандидат в π^0 -мезон. Требуется, чтобы

- Полный реконструированный импульс системы $e^+e^-\pi^+\pi^-\eta\pi^0$ был меньше чем 0.3 ГэВ/с в с.ц.м.;
- Реконструированная энергия системы $e^+e^-\pi^+\pi^-\eta\pi^0$ находится в диапазоне значений [10.1:10.7] ГэВ в с.ц.м.;
- Аналогичные требования на реконструированную энергию рассеянных электрона и позитрона как при отборе сигнальных событий $e^+e^- \rightarrow \eta'e^+e^-$;
- Аналогичные требования на идентификацию пионов как при отборе сигнальных событий $e^+e^- \rightarrow \eta'e^+e^-$;

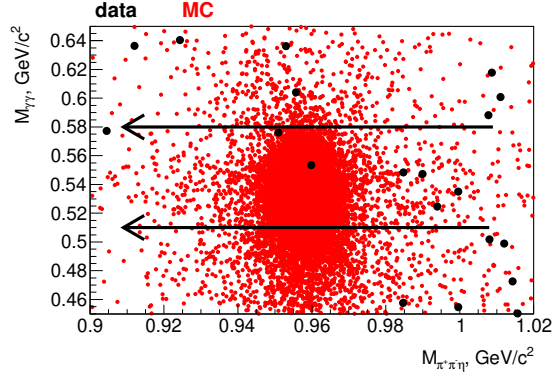


Рис. 3.11 — Спектр $M_{\gamma\gamma} = M_{\eta}$ в зависимости от $M_{\pi^+\pi^-\eta}$ для экспериментальные событий (синие прямоугольные точки) и Монте-Карло моделирования (красные точки).

Полученный спектр $M_{\eta} = M_{\gamma\gamma}$ в зависимости $M_{\eta'} = M_{\pi^+\pi^-\eta}$ представлен на рисунке 3.11. Черным цветом показаны экспериментальные данные, красным - моделирование. Стрелки демонстрируют примененное условие отбора: $0.51 < M_{\eta} < 0.58$ ГэВ/с². Рисунок 3.12 демонстрирует распределение по инвариантной массе двух фотонов $M_{\gamma\gamma} = M_{\pi^0}$ для отобранных событий, где гистограмма моделирования нормирована на число событий в эксперименте.

Для оценки числа фоновых событий $e^+e^-\pi^+\pi^-\eta\pi^0$ рассмотрим спектр $M_{\pi^+\pi^-\eta}$ на рисунке 3.13. Открытая гистограмма демонстрирует спектр экспериментальных данных, красной линией показан результат аппроксимации данных суммой сигнального профиля из моделирования и плоского профиля фона. В результате фита число сигнальных событий было определено как $N_{\eta'\pi^0}^{signal} = 0.77 \pm 1.26$, число фоновых событий под пиком $N_{\eta'\pi^0}^{backgr} = 1.3 \pm 0.5$. Видно, что $N_{\eta'\pi^0}^{signal}$ совместимо с нулем и $N_{\eta'\pi^0}^{signal} < 1.45$ с 90% уровнем достоверности. Согласно моделированию было получено, что эффективность реконструкции $\epsilon_{\eta'\pi^0}^{(1)}$ в гипотезе $e^+e^-\pi^+\pi^-\eta\pi^0$ равна 0.0853 ± 0.0006 , однако $\epsilon_{\eta'\pi^0}^{(2)}$ в гипотезе $e^+e^-\pi^+\pi^-\eta$ равна 0.0099 ± 0.0002 . Это позволяет оценить вклад фона в искомые сигнальные события изучаемой реакции $e^+e^- \rightarrow \eta'e^+e^-$ как $N_{bkgr} = \frac{N_{\eta'\pi^0}^{signal} \epsilon_{\eta'\pi^0}^{(2)}}{\epsilon_{\eta'\pi^0}^{(1)}} < 0.16$ на 90% уровне достоверности.

Также в качестве пикованного фона могут выступать процессы e^+e^- аннигиляции в конечные состояния, содержащие η' -мезон. Их вклад может быть оценен, рассмотрев двухмерное распределение $\cos(\alpha_{e^-})$ и $\cos(\alpha_{e^+})$ (рисунок 3.14), где α_{e^\pm} - угол между начальным и рассеянным электроном (позитроном) в

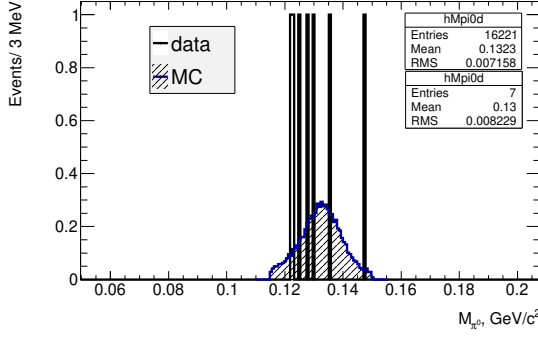


Рис. 3.12 — Спектр инвариантной массы двух фотонов - кандидатов в π^0 .

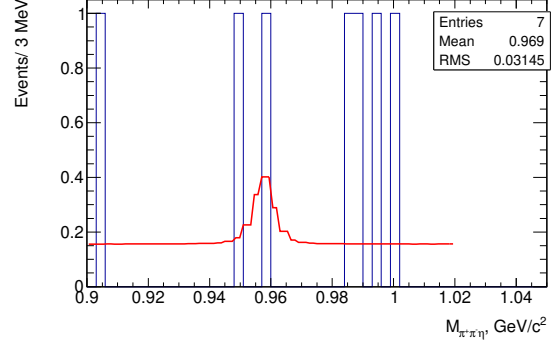


Рис. 3.13 — Спектр инвариантной массы $\pi^+\pi^-\eta$.

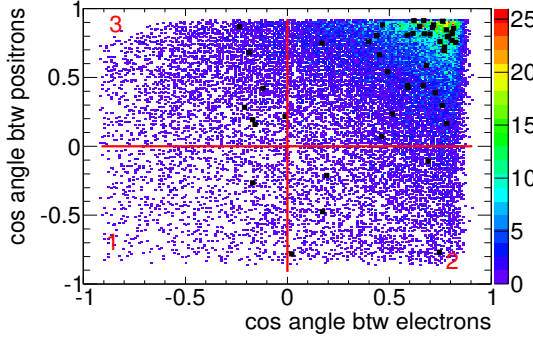


Рис. 3.14 — Спектр $\cos(\alpha_{e-})$ в зависимости от $\cos(\alpha_{e+})$ для экспериментальных данных (черные точки) и моделирования сигнала (цветная гистограмма).

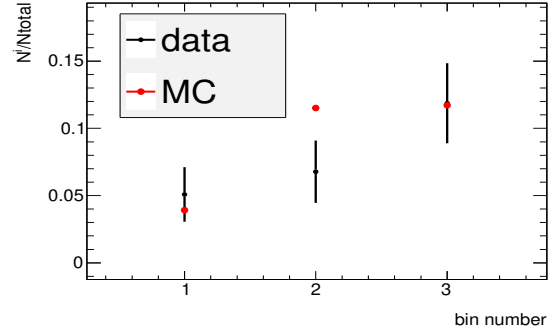


Рис. 3.15 — Относительная доля событий в областях, отмеченных на рисунке 3.14 относительно полного числа отобранных событий.

с.д.м.. Это распределение должно быть равномерным, если кандидат в электрон возник из виртуального фотона e^+e^- -аннигиляции, в то время как рассеянные электроны двухфотонных процессов в основном летят примерно в том же направлении, что и начальные. Распределение $\cos(\alpha_{e-})$ vs $\cos(\alpha_{e+})$ поделено на четыре области, причем основная часть сигнальных событий содержится в верхней правой области. Доли событий в первых трех областях относительно общего числа событий показано на рисунке 3.15, где видно хорошее согласие данных с моделированием, т.е. вклад фоновых процессов от e^+e^- аннигиляции не значителен.

Таблица 9 — Усредненные взвешенные значения $\overline{Q_1^2}$ и $\overline{Q_2^2}$, границы областей (Q_1^2, Q_2^2) , эффективность регистрации ($\varepsilon_{\text{true}}$), радиационная поправка (R), количество сигнальных событий (N_{events}), сечение $(d^2\sigma(\overline{Q_1^2}, \overline{Q_2^2})/(dQ_1^2 dQ_2^2))$ со статистической ошибкой, ПФФ $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \eta'$ ($F(\overline{Q_1^2}, \overline{Q_2^2})$) со статистической, систематической и модельной ошибками. Все представленные верхние пределы соответствуют 90% уровню достоверности.

$\overline{Q_1^2}, \overline{Q_2^2}$ (ГэВ ²)	область (Q_1^2, Q_2^2) (ГэВ ²)	$\varepsilon_{\text{true}}$	R	N_{events}	$d^2\sigma/(dQ_1^2 dQ_2^2)$ $\times 10^4$ (фб/ГэВ ⁴)	$F(\overline{Q_1^2}, \overline{Q_2^2})$ $\times 10^3$ (ГэВ ⁻¹)
6.48, 6.48	$2 < Q_1^2, Q_2^2 < 10$	0.019	1.03	$14.7^{+4.3}_{-3.6}$	$1471.8^{+430.1}_{-362.9}$	$14.32^{+1.95}_{-1.89} \pm 0.83 \pm 0.14$
16.85, 16.85	$10 < Q_1^2, Q_2^2 < 30$	0.282	1.10	$4.2^{+3.1}_{-2.7}$	$4.2^{+3.1}_{-2.7}$	$5.35^{+1.71}_{-2.15} \pm 0.31 \pm 0.42$
				< 9.8	< 10.0	< 14.53
14.83, 4.27	$10 < Q_1^2 < 30; 2 < Q_2^2 < 10$	0.145	1.07	$15.8^{+4.8}_{-4.0}$	$39.7^{+12.0}_{-10.2}$	$8.24^{+1.16}_{-1.13} \pm 0.48 \pm 0.65$
38.11, 14.95	$30 < Q_1^2 < 60; 2 < Q_2^2 < 30$	0.226	1.11	$10.0^{+3.9}_{-3.2}$	$3.0^{+1.2}_{-1.0}$	$6.07^{+1.09}_{-1.07} \pm 0.35 \pm 1.21$
45.63, 45.63	$30 < Q_1^2, Q_2^2 < 60$	0.293	1.22	$1.6^{+1.8}_{-1.1}$	$0.6^{+0.7}_{-0.6}$	$8.71^{+3.96}_{-8.71} \pm 0.50 \pm 1.04$
				< 5.0	< 1.9	< 32.03

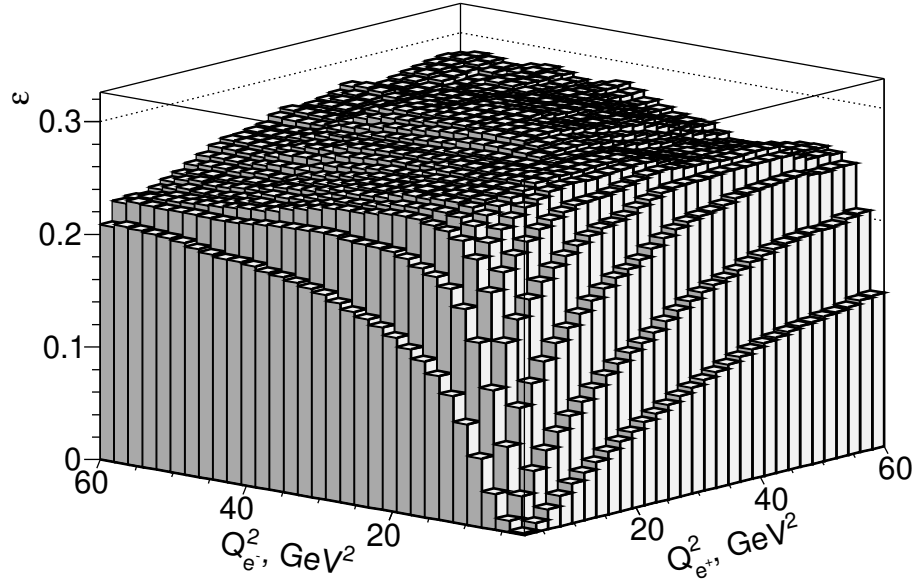


Рис. 3.16 — Эффективность регистрации в зависимости от квадратов импульсов фотонов Q_{e-}^2 и Q_{e+}^2 .

3.6 Эффективность регистрации сигнальных событий

Эффективность регистрации (ε) (см. рисунок 3.16) определяется из Монте-Карло моделирования в зависимости от виртуальностей фотонов (Q_{e-}^2, Q_{e+}^2) как отношение в моделировании числа отобранных событий к числу сгенерированных. Аксептанс детектора не позволяет реконструировать электроны, рассеян-

Таблица 10 — Источники систематических ошибок в сечении $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\eta'$.

Источник	Ошибка (%)
Идентификация π^\pm	1.0
Идентификация e^\pm	1.0
Другие условия отбора	11.0
Реконструкция треков	0.9
Реконструкция $\eta \rightarrow 2\gamma$	2.0
Триггеры, фильтры	1.3
Вычитание фона	3.7
Радиационная поправка	1.0
Светимость	1.0
Сумма	12%

ные под малым углом. Минимально доступное значение Q^2 составляет 2 ГэВ². Электрон-позитронные пучки разной энергии на коллайдере РЕР-II приводят к асимметрии в зависимостях эффективности от $Q_{e^+}^2$ и $Q_{e^-}^2$.

Ввиду симметрии ПФФ $F_{\eta'}(Q_1^2, Q_2^2) = F_{\eta'}(Q_2^2, Q_1^2)$ для дальнейшего описания используются обозначения:

$$Q_1^2 = \max(Q_{e^+}^2, Q_{e^-}^2), Q_2^2 = \min(Q_{e^+}^2, Q_{e^-}^2). \quad (3.11)$$

Ввиду того, что в моделировании сигнальных событий заложено постоянное значение ПФФ, усредненное значение эффективности регистрации в каждой области (Q_1^2, Q_2^2) определяется как отношение сверток:

$$\varepsilon_{true} = \frac{\int \varepsilon(Q_1^2, Q_2^2) F_{\eta'}^2(Q_1^2, Q_2^2) dQ_1^2 dQ_2^2}{\int F_{\eta'}^2(Q_1^2, Q_2^2) dQ_1^2 dQ_2^2}, \quad (3.12)$$

где в качестве ПФФ выступает выражение (3.7). Полученные усредненные значения для эффективности регистрации в пяти областях (Q_1^2, Q_2^2) представлены в таблицах 9 и 11. Источники систематических ошибок в эффективности регистрации представлены в таблице 10. Неопределенности, связанные с реконструкцией треков, $\eta \rightarrow 2\gamma$, триггерами и фильтром, а также с идентификацией пионов, были изучены в предыдущем (single-tagged) анализе с детектором BABAR [59].

Таблица 11 — Количество сгенерированных событий в каждой области (Q_{e-}^2, Q_{e+}^2) и эффективность регистрации.

№ области	N_{gen}^{mc}	ε_{true}
1	64656	0.019
2	17785	0.282
3	68757	0.145
4	29963	0.226
5	1892	0.293

Таблица 12 — Варьирование условий отбора для оценки систематической ошибки

отбор	$N_{signal}/\varepsilon_{true}$	отклонение от номинальных условий (%)
номинальные условия отбора	985 ± 197	
$P_{e^+e^-\eta'} < 1$ ГэВ/с вместо 0.35 ГэВ/с	1052 ± 273	6.8
$10.20 < E_{e^+e^-\eta'} < 10.75$ ГэВ вместо $10.3 < E_{e^+e^-\eta'} < 10.65$ ГэВ	942 ± 235	-4.3
без требований на E_{e^+} и E_{e^-}	1061 ± 280	7.7
$0.48 < m_{2\gamma} < 0.60$ ГэВ/с ² вместо $0.50 < m_{2\gamma} < 0.58$ ГэВ/с ²	958 ± 181	-2.7
квадратичная сумма		11

Для оценки ошибки, связанной с другими условиями отбора, эти требования были изменены и затем процедура вычитания фона и определения эффективности была повторена. Были рассмотрены следующие критерии:

- $P_{e^+e^-\eta'} < 1$ ГэВ/с (вместо 0.35 ГэВ/с);
- $10.20 < E_{e^+e^-\eta'} < 10.75$ ГэВ (вместо $10.30 < E_{e^+e^-\eta'} < 10.65$ ГэВ);
- $0.48 < M_{\gamma\gamma} < 0.60$ ГэВ/с² (вместо $0.50 < M_{\gamma\gamma} < 0.58$ ГэВ/с²);
- удалив ограничение на реконструированную энергию рассеянных электронов E_{e^+} и E_{e^-} .

Список варьированных условий отбора приведен в таблице 12. Квадратичная сумма отклонений $N_{signal}/\varepsilon_{true}$ от своего номинального значения (11%) используется в качестве оценки систематической неопределенности в эффективности регистрации.

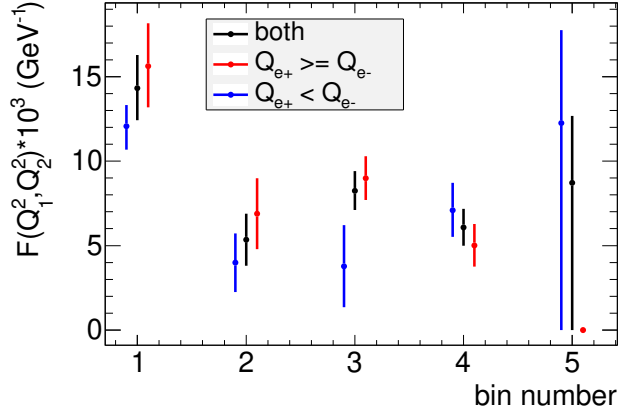


Рис. 3.17 — Сравнение ПФФ $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \eta'$, определенного при разных условиях $Q_{e+}^2 < Q_{e-}^2$, $Q_{e+}^2 \geq Q_{e-}^2$ и без ограничений.

3.7 Сечение процесса $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\eta'$ и переходный форм-фактор η' -мезона

Дифференциальное борновское сечение процесса $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\eta'$ определяется выражением:

$$\frac{d^2\sigma}{dQ_1^2 dQ_2^2} = \frac{1}{\varepsilon_{\text{true}} R \mathcal{L} \mathcal{B}} \frac{d^2 N}{dQ_1^2 dQ_2^2}, \quad (3.13)$$

где $d^2 N/(dQ_1^2 dQ_2^2)$ - количество сигнальных событий в области (Q_1^2, Q_2^2) , \mathcal{L} - интегральная светимость, и R - радиационная поправка. Фактор \mathcal{B} - это произведение вероятностей распада $\mathcal{B}(\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta)\mathcal{B}(\eta \rightarrow \gamma\gamma) = 0.169 \pm 0.003$ [74]. Радиационная поправка R определена, используя моделированные спектры на генераторном уровне. Один спектр $Q_{1,2}^2$ генерировался, используя борновскую амплитуду $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\eta'$, другой такой же спектр генерировался на основе амплитуд, включающих радиационные поправки. Фактор R как отношение сечений процесса в каждой области (Q_1^2, Q_2^2) , как представлено в таблице 9.

Сечение искомого процесса в диапазоне $2 < Q_1^2, Q_2^2 < 60 \text{ ГэВ}^2$, вычисленное согласно выражению (3.13) равно

$$\sigma = 11.4_{-2.4}^{+2.8} \text{ fb}, \quad (3.14)$$

где представлена только статистическая ошибка. Для определения ПФФ производится сравнение сечений, подсчитанного в моделировании и определенного в эксперименте, используя выражение (3.13). Сечение в моделировании найдено

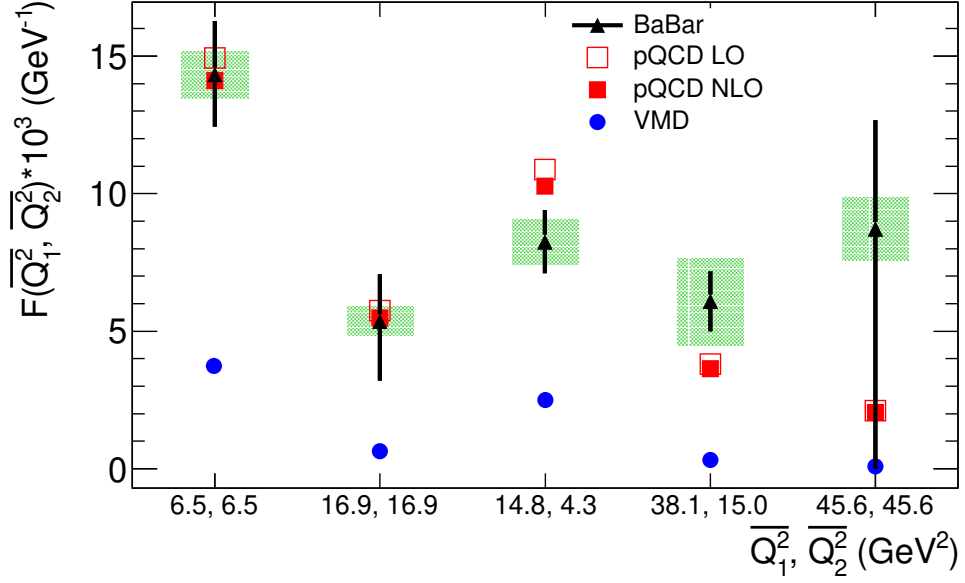


Рис. 3.18 — Сравнение полученного форм-фактора $\gamma^*\gamma^* \rightarrow \eta'$ (треугольные точки со статистическими ошибками) с предсказаниями моделей пКХД и МВД. Закрашенные зеленым цветом прямоугольные области соответствуют квадратичной сумме модельной и систематической ошибки.

с помощью ПФФ $F_{\eta'}^2(Q_1^2, Q_2^2)$ (см. (3.7)). Таким образом, ПФФ определяется как

$$F^2(\overline{Q}_1^2, \overline{Q}_2^2) = \frac{(d^2\sigma/(dQ_1^2 dQ_2^2))_{data}}{(d^2\sigma/(dQ_1^2 dQ_2^2))_{MC}} F_{\eta'}^2(\overline{Q}_1^2, \overline{Q}_2^2). \quad (3.15)$$

Средние значения виртуальностей в каждой области (Q_1^2, Q_2^2) подсчитаны, используя экспериментальный спектр с нормировкой на эффективность регистрации:

$$\overline{Q}_{1,2}^2 = \frac{\sum_i Q_{1,2}^2(i)/\varepsilon(Q_1^2, Q_2^2)}{\sum_i 1/\varepsilon(Q_1^2, Q_2^2)}. \quad (3.16)$$

Для областей 1, 2 и 5 величины \overline{Q}_1^2 и \overline{Q}_2^2 усреднены между собой.

3.8 Систематические ошибки

Систематическая ошибка состоит из нескольких частей. Первая часть связана с неопределенностью в вычитании фоновых событий (см. 3.4). Далее идут неопределенность в эффективности регистрации (см. параграф 3.6), в радиационной поправке (1%) [79] и в интегральной светимости (1%) [75]. Все источники

Таблица 13 — Сечение $\frac{d^2\sigma}{dQ_1^2 dQ_2^2}$ (фб/ГэВ⁴) с разными моделями ПФФ

модель ПФФ	1	2	3	4	5
3.7	$1471.8^{+430.136}_{-362.91}$	$4.17^{+2.75}_{-2.75}$	$39.72^{+11.98}_{-10.18}$	$2.98^{+1.17}_{-0.96}$	$0.62^{+0.69}_{-0.62}$
const	$637.10^{+186.19}_{-157.09}$	$4.15^{+2.74}_{-2.74}$	$33.30^{+10.05}_{-8.54}$	$2.76^{+1.08}_{-0.89}$	$0.62^{+0.69}_{-0.62}$
отклонение, %	60	0.6	15	7	1

систематической ошибки в сечении представлены в таблице 10. Полная ошибка в сечении (12%) равна квадратичной сумме всех источников. Модельная неопределенность будет обсуждена ниже.

Как видно из рисунка 3.16 эффективность регистрации по-разному зависит от квадратов импульсов фотонов Q_{e-}^2 и Q_{e+}^2 . Для проверки насколько корректно моделируется данная асимметрия был произведен дополнительный тест. А именно, ПФФ был вычислено отдельно при $Q_{e-}^2 \leq Q_{e+}^2$ и наоборот. Результат представлен на рисунке 3.17, откуда видно что разные кинематические области совместимы друг с другом.

3.9 Модельная неопределенность

Модельная неопределенность искомого измерения связана с зависимостью следующих величин от модели ПФФ: $(d^2\sigma/(dQ_1^2 dQ_2^2))_{MC}$ и ε_{true} . Для оценки возможной ошибки вычисления выражений (3.12), (3.13), и (3.15) были повторены с $F_{\eta'}(Q_1^2, Q_2^2) = const$. Как видно из таблиц 13 и 14, модельная неопределенность сечения составляет около 60%, ввиду очень резкой зависимости эффективности регистрации от виртуальностей фотонов при малых значениях. Однако, значения ПФФ гораздо менее чувствительны к модели, потому что оно определяется как отношение сечений в эксперименте и моделировании и неопределенности сокращаются в значительной степени.

Таблица 14 — Значения ПФФ при разных моделях ПФФ

модель ПФФ	1	2	3	4	5
3.7	$14.32^{+1.95}_{-1.89}$	$5.35^{+1.54}_{-1.54}$	$8.24^{+1.16}_{-1.13}$	$6.07^{+1.09}_{-1.07}$	$8.71^{+3.96}_{-8.71}$
const	$14.61^{+1.99}_{-1.92}$	$5.62^{+1.62}_{-1.62}$	$7.24^{+1.02}_{-0.99}$	$7.24^{+1.30}_{-1.28}$	$10.02^{+4.55}_{-10.02}$
отклонение, %	1	8	8	20	12

3.10 Обсуждение результатов

Полученные значения ПФФ в диапазоне $2 < Q_1^2, Q_2^2 < 60 \text{ ГэВ}^2$ представлены в таблице 9 и на рисунке 3.18 в виде треугольников со статистическими ошибками. Квадратичная сумма систематической и модельной ошибок представлена в виде закрашенных прямоугольников. Открытые и закрашенные прямоугольники на рисунке 3.18 соответствуют LO и NLO предсказаниям пКХД (3.7), соответственно. Видно, что поправка к LO относительно небольшая, а также модель пКХД согласуется с данными. Круглые точки на рисунке показывают предсказания МВД, которые противоречат эксперименту.

Глава 4. Заключение

В настоящей работе получены следующие результаты:

Изучен процесс аннигиляции $e^+e^- \rightarrow \rho\eta\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-\eta\gamma$, где фотон излучен начальной электрон-позитронной парой.

- Измерено сечение процесса $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$ в диапазоне масс $m_{\pi^+\pi^-\eta} = [1.15 \div 3.5]$ ГэВ/с². Сечение согласуется с измерениями других экспериментов. Полученные ошибки сравнимы с ошибками других экспериментов.
- Поведение сечения в зависимости от $m_{\pi^+\pi^-\eta} = [1.2 \div 2.2]$ ГэВ/с² аппроксимировано в рамках МВД четырьмя изовекторным ρ -подобными резонансами.
- Используя CVC гипотезу о сохранении изовекторного тока, было получено предсказание для значения вероятности распада $B(\tau^\pm \rightarrow \pi^\pm\pi^0\eta\nu_\tau) = 0.162 \pm 0.009$ %.
- На основе 49 ± 9 событий распада J/ψ измерена величина $\Gamma_{J/\psi \rightarrow e^-e^+} B_{J/\psi \rightarrow \pi^+\pi^-\eta} = 2.34 \pm 0.46$ эВ, и определена вероятность распада $B(J/\psi \rightarrow \pi^+\pi^-\eta) = 0.042 \pm 0.008$ %.

Изучен процесс $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\eta'$, где конечные фермионы рассеялись на большой угол и задетектированы. Впервые измерен переходной форм-фактор $F_{\eta'}(Q_1^2, Q_2^2)$ в области виртуальностей $2 < Q_1^2, Q_2^2 < 60$ ГэВ/с². Также показано, что в данном диапазоне виртуальностей модель векторной доминантности недооценивает величину формфактора, в то время как предсказания пКХД согласуются с экспериментальными данными.

Большое спасибо моему научному руководителю Солодову Евгению Петровичу за широкую поддержку и создание условий для написания диссертации, а также за активную передачу своего накопленного опыта в обработке и анализе данных по физике частиц. Также я очень признателен Дружинину Владимиру Прокопьевичу за плодотворное сотрудничество, советы, серьезную поддержку и помощь в работах, часть которых изложена в диссертации. Спасибо вам обоим, что я имею сейчас все шансы стать кандидатом физико-математических наук. Эта работа выполнена в рамках коллаборации *BABAR*, поэтому я благодарю всех сотрудников коллаборации и команду ускорителя PEP-II.

Литература

- [1] J.P. Lees *et al.* (*BABAR* Collaboration), Phys. Rev. D **97**, 052007 (2018).
- [2] J.P. Lees *et al.* (*BABAR* Collaboration), Phys. Rev. D **98**, 112002 (2018).
- [3] B. Delcourt *et al.* (DM1 Collaboration), Phys. Lett. B **113**, 93 (1982).
- [4] V. P. Druzhinin *et al.* (ND Collaboration), Phys. Lett. B **174**, 115 (1986).
- [5] A. Antonelli *et al.* (DM2 Collaboration), Phys. Lett. B **212**, 133 (1988).
- [6] R. R. Akhmetshin *et al.* [CMD-2 Collaboration], Phys.Lett. B**489**, 125 (2000) [hep-ex/0009013].
- [7] B. Aubert, *et al.* (*BABAR* Collaboration), Phys. Rev. D **76**, 092005 (2007).
- [8] J.P. Lees, *et al.* (*BABAR* Collaboration), Phys. Rev. D **98**, 112015 (2018).
- [9] M. N. Achasovet *et al.* (SND Collaboration), JETP Lett. **92**, 80 (2010).
- [10] V. M. Aulchenko *et al.* (SND Collaboration), Phys. Rev. D **91**, 052013 (2015).
- [11] M. N. Achasov *et al.* (SND Collaboration), Phys. Rev. D **97**, 012008 (2018).
- [12] M. Ablikim *et al.* (BES Collaboration), Phys. Lett. D **70**, 112007 (2004).
- [13] K. Belous *et al.* (Belle Collaboration), Phys. Lett. B **681**, 400 (2009).
- [14] S.S. Griбанov *et al.* (CMD-3 Collaboration) arXiv:1907.08002.
- [15] J. Lees *et al.* (*BABAR* Collaboration), Phys. Rev. D **70**, 072004 (2004).
- [16] B. Aubert *et al.* (*BABAR* Collaboration) Phys. Rev. Lett. **102**, 012001 (2009).
- [17] G. Cosme *et al.*, Phys. Lett. B **63**, 349 (1976).
- [18] M., Benayoun *et al.*, Mod. Phys. Lett. A**14**, 2605-2614 (1999) [hep-ph/9910523].
- [19] J. Jousset *et al.* (DM2 Collaboration), Phys. Rev. D **41**, 5 (1990).
- [20] D. Coffman *et al.* (MARK-III Collaboration), Phys. Rev. D **38**, 2695 (1988).

- [21] M. Davier *et al.*, Eur. Phys. J. C **71**, 1515 (2011)
- [22] N.N.Achasov, V.A.Karnakov, JETP Letters **39**, 285 (1984).
- [23] M. K. Volkov *et al.*, Phys. Rev. C **89**, 015202 (2014).
- [24] D. G. Dummet *et al.*, Phys. Rev. D **86**, 076009.
- [25] *BABAR* Collaboration (Lees, J.P. et al.), Nucl. Instrum. Meth. A **726** (2013) 203-213; arXiv:1301.2703 [hep-ex].
- [26] B. Aubert et al., Nucl. Instr. Meth. A **479**,1 (2002).
- [27] *BABAR* Collaboration. The Pub Board Page of Official Plots, [http://www.slac.stanford.edu/BFROOT/www/Organization/PubBoard/OfficialPlots/status of 25th of July](http://www.slac.stanford.edu/BFROOT/www/Organization/PubBoard/OfficialPlots/status%20of%2025th%20of%20July) (2011).
- [28] B. Aubert *et al.* (*BABAR* Collaboration), Nucl. Instr. Meth. A **538** (2005).
- [29] A.M. Ruland *et al.* (*BABAR* calorimeter group), J. Phys.: Conf. Ser. **160**, 012004 (2009).
- [30] V.P. Druzhinin, "Simulation of ISR processes with hard photon <http://www.slac.stanford.edu/BFROOT/www/Physics/Tools/generators/AfkQed.ps>.
- [31] M. Caffo, H.Czyz, E.Remiddi, Nuo. Cim. **110A**, 515 (1997); Phys. Lett. **B327**, 369 (1994).
- [32] E. BarBerio, B. van Eijk and Z. Was, Comput. Phys. Commun. **66**,115 (1991).
- [33] S. Agostinelli et al. (Geant4 Collaboration), Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A **506**, 250 (2003).
- [34] T. Sjostrand, Comput. Phys. Commun. **82**, 74 (1994).
- [35] S. Jadach and Z. Was, Comput. Phys. Commun. **85**, 453 (1995).
- [36] J.P. Lees *et al.* (*BABAR* Collaboration), Phys. Rev. D **96**, 092009 (2017).
- [37] A supporting document for a physics analysis BAD 2546.
- [38] A supporting document for a physics analysis BAD 215.

- [39] The report on PhiPsi conference 2015, China,
<http://indico.ihep.ac.cn/event/4464/session/0/contribution/22/material/slides/0.pdf>
- [40] B. Aubert et al. (*BABAR* Collaboration), Phys. Rev. D **70**, 072004 (2004).
- [41] B. Aubert et al. (*BABAR* Collaboration), Phys.Rev.D **80**, 052002 (2009)
- [42] J. P. Lees et al., Phys. Rev. D **85**, 112009 (2012).
- [43] S. Agostinelli *et al.* (Geant4 Collaboration), Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A **506**, 250 (2003).
- [44] <https://root.cern.ch/root/html304/TMatrixD.html>
- [45] Y.S.Tsai, Phys. Rev.D**4**,2821 (1971).
- [46] JETP Letters, Vol.**89**,No.9, pp.429–431 (2009).
- [47] R.R. Akhmetshin *et al.* (CMD-3 Collaboration), Phys. Lett. B **794**, 10 (2019).
- [48] J. Haidenbauer et al., Phys. Rev. D**92**, 054032(2015) [hep-ex/1506.08120].
- [49] A. E. Obrazovsky and S. I. Serednyakov, JETP Lett. **99**, 315 (2014).
- [50] J. Haidenbauer, C. Hanhart, X. W. Kang and U. G. Meißner, Phys. Rev. D **92**, 054032 (2015).
- [51] J.P. Lees *et al.* (*BABAR* Collaboration) arXiv:1912.04512.
- [52] K.Inami *et al.*,Phys. Lett. B**672**, 209–218 (2009).
- [53] K. A. Olive et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C, **38**, 090001 (2014).
- [54] S. Actis *et al.*, Eur. Phys. J. C **66**, 585 (2010).
- [55] C. Berger *et al.* (PLUTO Collaboration), Phys. Lett. B **142**, 125 (1984).
- [56] H. Aihara *et al.* (TPC/Two Gamma Collaboration), Phys. Rev. D **38**, 1 (1988);
Phys. Rev. Lett. **64**, 172 (1990).
- [57] H.-J. Behrend *et al.* (CELLO Collaboration), Z. Phys. C **49** (1991) 401.
- [58] J. Gronberg *et al.* (CLEO Collaboration), Phys. Rev. D **57**, 33 (1998).

- [59] P. del Amo Sanchez *et al.* (*BABAR* Collaboration), Phys. Rev. D **84**, 052001 (2011).
- [60] G. Kopp, T. F. Walsh, and P. M. Zerwas, Nucl. Phys. B **70**, 461 (1974).
- [61] S. Berman and D. Geffen, Nuovo Cim. **18**, 1192 (1960).
- [62] P. Kroll, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **219-220**, 2 (2011).
- [63] S. Agaev *et al.*, Phys. Rev. D **90**, 074019 (2014).
- [64] B.-I. Young, Phys. Rev. **161**, 1620 (1967).
- [65] L. G. Landsberg, Phys. Rep. **128**, 301 (1985).
- [66] A. Dorokhov, M. Ivanov, and S. Kovalenko, Phys.Lett. B **677**, 145 (2009).
- [67] T. Feldmann, P. Kroll and B. Stech, Phys. Rev. D **58**, 114006 (1998).
- [68] Fu-Guang Cao, Phys. Rev. D **85**, 057501 (2012).
- [69] E. Braaten, Phys. Rev. D **28**, 524 (1983).
- [70] S. J. Brodsky and G. P. Lepage, Phys. Rev. D **24**, 7 (1981); G. P. Lepage and S. J. Brodsky, Phys. Rev. D **22**, 2157 (1980).
- [71] V. L. Chernyak and A. R. Zhitnitsky, Nucl. Phys. B **201**, 492 (1982); Phys. Rep. **112** 173 (1984); Nucl. Phys. B **246**, 52 (1984).
- [72] T. Feldmann and P. Kroll, Phys. Rev. D **58**, 057501 (1998).
- [73] A. J. Brodsky, F. Cao and G. Teramond, Phys. Rev. D **84**, 033001 (2011).
- [74] C. Patrignani *et al.* (Particle Data Group), Chin. Phys. C **40**, 100001 (2016).
- [75] J. P. Lees *et al.* (*BABAR* Collaboration), Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A **726**, 203 (2013).
- [76] B. Aubert *et al.* (*BABAR* Collaboration), Nucl. Instrum. and Meth. A **479**, 1 (2002).
- [77] B. Aubert *et al.* (*BABAR* Collaboration), Nucl. Instrum. and Meth. A **729**, 615 (2013).

- [78] V. P. Druzhinin, L. V. Kardapoltsev and V. A. Tayursky, Comput. Phys. Commun. **185**, 236 (2014).
- [79] S. Ong and P. Kessler, Phys. Rev. D **38**, 2280 (1988).
- [80] G. J. Feldman and R. D. Cousins, Phys. Rev. D **57**, 3873 (1998).
- [81] CLEO, J.Gronberg *et al.*, Phys. Rev. D **57**, 33 (1998).
- [82] V. N. Baier and A. G. Grozin, Nucl. Phys. B **192**, 476 (1981).
- [83] P. Kroll and K. Passek-Kumericki, Phys. Rev. D **67**, 054017 (2003).
- [84] S. S. Agaev and N. G. Stefanis, Phys. Rev. D **70**, 054020 (2004).