

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

В. М. Аульченко

**Анализ сигналов.  
Элементы аналоговой электроники**

Учебное пособие

Новосибирск  
2001

# **www.phys.nsu.ru**

Аульченко В.М. Анализ сигналов. Элементы аналоговой электроники:  
Учебное пособие.

Новосибирский гос. ун - т. Новосибирск, 2001. 104 с.  
ISBN 5-94356-028-9

Учебное пособие составлено по материалам спецкурса "Аналоговая электроника", читаемого автором на протяжении ряда лет для студентов отделения физико-технической информатики. На материале этого спецкурса базируется следующий спецкурс - "Электроника детекторных систем", и содержание пособия является необходимой базой для его усвоения.

В первые трех главах пособия излагаются общие вопросы, касающиеся способов описания сигналов, их прохождения через линейные передающие системы и построения простых усилительных каскадов.

В четвертой и пятой главах достаточно подробно рассматриваются источники шумов в усилительных каскадах и способы их фильтрации. В приложении содержатся дополнительные сведения и примеры, расширяющие содержание основных глав. Текст содержит множество рисунков, облегчающих восприятие материала.

Пособие предназначено для студентов, чья специализация связана с разработкой аппаратуры для физических экспериментов, сбором и обработкой аппаратуры для физических экспериментов, сбором и обработкой физической информации..

Рецензент д-р техн. наук, проф. В.И. Нифонтов,  
канд. техн. наук. А.С. Медведко

© Интернет версия подготовлена для  
сервера Физического факультета НГУ  
<http://www.phys.nsu.ru>

© Новосибирский государственный  
Университет, 2001

# **www.phys.nsu.ru<sup>2</sup>**

## 1. Анализ сигналов

Физическая природа сигналов, используемых для передачи информации, может быть самой разнообразной. Мы будем вести речь лишь об электрических сигналах. Всякий сигнал можно описать в виде зависимости его величины от времени. Но в каждом конкретном случае может оказаться удобнее описывать сигнал через другие параметры, получаемые из временных функций. В частности, сигнал можно представить в виде суммы составляющих различных частот (ряд или интеграл Фурье).

Представление сигнала в виде аддитивных, не обязательно гармонических составляющих, особенно полезно при анализе линейных цепей, независимо обрабатывающих каждую составляющую. Полный выходной сигнал линейной системы можно определить (по крайней мере, в принципе) путем простого сложения. Представление сигналов в виде аддитивных составляющих полезно также при изучении основных нелинейных операций.

Линейные системы выполняют очень широкий класс операций над сигналами – усиление, фильтрацию, преобразование спектров и так далее.

### 1.1. Импульсные сигналы

Импульс напряжения, приложенный к индуктивности, вызывает в ней изменение тока. Мерой этого изменения является интеграл от сигнала по времени. Импульс тока, поданный на ёмкость, вызывает изменение напряжения на ней, пропорциональное интегралу от сигнала. Поэтому интеграл вида

$$\int v(t)dt. \quad [1.1.1]$$

является важным параметром импульсного сигнала.

Другим важным параметром является интеграл по времени от квадрата временной функции сигнала (интегральный квадрат), который называется *энергией* сигнала:

$$E = \int v^2(t)dt. \quad [1.1.2]$$

Для сигнала напряжения или тока интегральный квадрат равен энергии, выделяемой на единичном сопротивлении.

В дополнение к данному выше определению будем считать импульсным сигнал, энергия которого не равна нулю, но конечна:

$$0 < \int |v|^2 dt < \infty. \quad [1.1.3]$$

В качестве примера импульсных сигналов, наиболее часто используемых при анализе электронных устройств, можно назвать гауссов и единичный импульсы.

Гауссов импульс:

$$\frac{1}{t_0} e^{-\pi \left( \frac{t}{t_0} \right)^2} \quad [1.1.4]$$

весьма точно представляется треугольником с амплитудой  $1/t_0$  и основанием  $2t_0$ .

Единичный импульс  $u_0(t)$  определяется как предельный переход:

$$u_0(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{t_0} e^{-\pi \left( \frac{t}{t_0} \right)^2} \right]. \quad [1.1.5]$$

Единичный импульс имеет бесконечную амплитуду, бесконечно малую ширину и единичную площадь ( $\delta$ -функция):

$$\int u_0(t) dt = 1. \quad [1.1.6]$$

Энергия единичного импульса бесконечна:

$$\int u_0^2 dt = \infty; \quad [1.1.7]$$

обычно этот интеграл представляют как предельный переход, а не сам предел. При таком подходе приближением к единичному импульсу является импульс с произвольно большой, но конечной энергией, принадлежащий поэтому к классу импульсных сигналов.

Бесконечно короткий сигнал, имеющий площадь  $S = \lim_{dt \rightarrow 0} \int v(t) dt$ , где  $v(t)$  – текущая величина сигнала, называется линейным импульсом.

## 1.2. Периодические сигналы

Периодическим называется сигнал, повторяющийся через равные промежутки времени, –  $v(t) = v(t + T)$  для всех значений  $t$ .

Наименьшая величина  $T$ , удовлетворяющая этому равенству, называется периодом. Если поведение периодического сигнала на интервале  $T$  известно, то известны его прошлое и будущее, поэтому периодический сигнал не может быть использован для передачи информации.

Интеграл от периодического сигнала является неопределенным или бесконечным, но среднее по времени существует:

$$\bar{v} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} v(t) dt. \quad [1.2.1]$$

Усреднение по времени является общей операцией, применяемой как к периодическим, так и к непериодическим сигналам. Для периодических сигналов среднее за все время равно среднему за период:

$$\bar{v} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) dt. \quad [1.2.2]$$

Средняя мощность сигнала определяется как величина  $\overline{v^2}$ ; сигнал конечной мощности удовлетворяет условию  $0 < \overline{v^2} < \infty$ . Периодические сигналы являются сигналами конечной мощности. Их средняя мощность равна энергии за период, умноженной на число периодов в 1-й секунде, т. е. на частоту ( $f = 1/T$ ).

### 1.3. Почти периодические сигналы

Почти периодическими являются сигналы, которые можно представить с любой точностью за любой промежуток времени конечной суммой периодических сигналов. Всякий периодический сигнал можно отнести к почти периодическим, но обратное не всегда справедливо.

Рассмотрим сигнал

$$\cos(x) + \cos(\sqrt{2}x). \quad [1.3.1]$$

Невозможно найти для такого сигнала величину  $T$ , удовлетворяющую условию периодичности, но этот сигнал несомненно почти периодический. Его можно представить как предельный переход, когда период периодического сигнала становится бесконечным. Действительно, пусть имеется периодический сигнал:

$$\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) \quad [1.3.2]$$

с основным периодом  $T$ , так что можно найти такие два числа  $m$  и  $n$ , что:

$$\omega_1 T = 2\pi m, \quad [1.3.3]$$

$$\omega_2 T = 2\pi n, \quad [1.3.4]$$

откуда следует:  $\omega_1/\omega_2 = m/n$ .

Для сигнала  $\cos(x) + \cos(1.41x)$   $m = 100$ ,  $n = 141$  и  $T = 200\pi$ .

Таким образом, полный сигнал имеет гораздо больший период, чем периоды обеих составляющих. Если увеличивать число знаков при вычислении  $\sqrt{2}$ , то период может стать сколь угодно большим.

#### 1.4. Случайные сигналы

Случайный сигнал создается случайным процессом, и его часто называют выборочной функцией процесса. Случайность процесса может быть следствием нашей неспособности или нежелания описывать процесс полностью или является его объективной характеристикой.

Пусть имеется сигнал  $V$ , принимающий случайным образом дискретные значения  $v_k$ . Частота появления данного значения сигнала, отнесенная к полному числу измерений, называется вероятностью  $p_k$  значения сигнала  $v_k$ . По определению  $\sum p_k = 1$ . Среднее значение сигнала определяется как весовая сумма:

$$\langle v \rangle = \sum v_k p_k. \quad [1.4.1]$$

Аналогично можно вычислить средний квадрат величины сигнала, характеризующий среднюю мощность сигнала. Интеграл

по времени от  $\langle v^2(t) \rangle$  равен средней энергии сигнала за время интегрирования.

Если возможные значения случайного сигнала образуют непрерывный ряд, то вероятность данного значения сигнала становится бесконечно малой. В этом случае пользуются плотностью вероятности  $P(v)$ . Для дискретных сигналов функция плотности вероятности состоит из набора линейных импульсов с амплитудой  $p_k$ , расположенных в точках  $v_k$ .

Произведение  $P(v_1)dv$  представляет вероятность попадания величины сигнала в бесконечно малый интервал  $dv$  в окрестности значения  $v_1$ . Площадь под кривой  $P(v)$  между  $v_1$  и  $v_2$  равна вероятности попадания величины сигнала в этот интервал. Среднее значение сигнала

$$\bar{v} = \int P(v)v dv. \quad [1.4.2]$$

### 1.5. Стационарные случайные процессы

Стационарным называется случайный процесс, характеристики которого не меняются с течением времени. Сигналы (выборочные функции), порождаемые стационарными случайными процессами, характерны тем, что достаточно длительный по времени отрезок сигнала, записанный за некоторое прошедшее время, имеет те же статистические характеристики, что и любой другой отрезок сигнала, наблюдаемый в любой другой отрезок времени в будущем. Выборочная функция, взятая из стационарного случайного процесса, не позволяет определить, какому времени она принадлежит.

Сказанным не исчерпывается вопрос о стационарности случайных процессов и на эту тему имеется обширная литература.

### 1.6. Постоянная и переменная составляющие

Всякий сигнал  $v(t)$  конечной мощности можно разложить на постоянную и переменную составляющие:

$$v_c = \bar{v} ; \quad v_a = \bar{v} - v_c. \quad [1.6.1]$$

Из определения среднего следует, что среднее значение переменной составляющей равно нулю. Полную мощность можно вычислить по постоянной и переменной составляющим. Так как  $v = v_c + v_a$ , то

$$\overline{v^2} = \overline{(v_c^2 + 2v_c v_a + v_a^2)} = v_c^2 + 2\overline{v_c v_a} + \overline{v_a^2}. \quad [1.6.2]$$

Поскольку среднее от суммы равно сумме средних, то получаем:

$$\overline{v^2} = \overline{v_c^2} + \overline{v_a^2}, \quad [1.6.3]$$

т. е. средняя мощность любого сигнала равна сумме средних мощностей постоянной и переменной составляющих.

Рассмотрим некий случайный сигнал  $v(t)$ , имеющий распределение плотности вероятности  $P(v)$ . Отклонение от среднего:

$$v_d = v - \bar{v}. \quad [1.6.4]$$

Так как среднее значение  $\bar{v}_d = 0$ , то средний квадрат сигнала

$$\overline{v^2} = \int P(v) (\bar{v} + v_d)^2 dv = \bar{v}^2 + \overline{v_d^2}. \quad [1.6.5]$$

*Средний квадрат сигнала равен квадрату его среднего значения плюс средний квадрат отклонения.*

У стационарных случайных процессов плотность вероятности  $P(v)$  не зависит от времени, поэтому  $\bar{v}$  и  $\overline{v_d^2}$  являются эквивалентами соответственно  $v_c$  и  $v_a^2$ .

Вычислим среднюю мощность стационарного случайного процесса для частного, но очень важного случая нормального (гауссова) распределения плотности вероятности:

$$P_d(v) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-v_c}{\sigma}\right)^2}. \quad [1.6.6]$$

Такое распределение имеет, например, напряжение тепловых шумов.

Запись содержит параметр  $\sigma$ , называемый стандартным отклонением распределения, а коэффициент перед экспонентой

выбран так, чтобы интеграл от  $P(v)$  по всем возможным значениям сигнала был равен единице.

Распределение в таком виде симметрично относительно нуля, так что среднее значение  $\bar{v} = 0$  и  $v = v_a$ . Если сигнал имеет ненулевой средний уровень, то это приведет лишь к тому, что средний квадрат возрастет на  $(\bar{v})^2$ .

Дифференцируя  $P(v)$  дважды, получим:

$$\frac{d^2 P_a}{d v^2} = \left[ \left( \frac{v}{\sigma} \right)^2 - 1 \right] \frac{P_a}{\sigma^2}. \quad [1.6.7]$$

Так как  $\int_{-t}^t \frac{d^2 P_a}{d v^2} dv = 0,$  [1.6.8]

то получаем соотношение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_a(v) v^2 dv = \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} P_a(v) dv = \bar{v}^2. \quad [1.6.9]$$

что эквивалентно равенству  $\bar{v}^2 = \sigma^2$  (дисперсия).

У стационарного случайного процесса с распределением амплитуд средняя мощность составляющей равна квадрату стандартного называемому дисперсией нормального распределения.

### 1.7. Четная и нечетная составляющие

Четная и нечетная составляющие определяются уравнениями:

$$v_e(t) = 1/2[v(t) + v(-t)] = v_e(-t), \quad [1.7.1]$$

$$v_o(t) = 1/2[v(t) - v(-t)] = -v_o(-t), \quad [1.7.2]$$

так что  $v = v_e + v_o.$  [1.7.3]

Четная и нечетная составляющие в общем случае изменяются при сдвиге начала координат. Площадь под кривой нечетной составляющей импульсного сигнала тождественно равна нулю:

$$\int v_0 dt = 0, \text{ следовательно, } \bar{v}_0 = 0.$$

Таким образом, среднее значение сигнала равно среднему значению его четной составляющей  $\bar{v} = \bar{v}_e$ .

Средняя мощность сигнала по определению

$$\overline{v^2} = \overline{(v_e^2 + 2v_e v_0 + v_0^2)}.$$

Второй член в правой части является нечетной функцией, поэтому

$$\overline{v^2} = \overline{v_e^2} + \overline{v_0^2}. \quad [1.7.4]$$

*Средняя мощность сигнала равна сумме средних мощностей его четной и нечетной составляющих.*

То же справедливо для энергии импульсного сигнала.

### 1.8. Действительная и мнимая составляющие

Сигнал, мгновенное значение которого является комплексной величиной, описывается суммой действительной и мнимой составляющих:

$$\dot{v} = v_r + jv_i, \quad (j^2 = -1). \quad [1.8.1]$$

Сигнал  $\dot{v}^* = v_r - jv_i$  называется комплексно-сопряженным с  $\dot{v}$ .

$$\text{Очевидно, что } v_r = \frac{1}{2}(\dot{v} + \dot{v}^*) \text{ и } v_i = \frac{1}{2}(\dot{v} - \dot{v}^*). \quad [1.8.2]$$

Квадрат мгновенной величины сигнала (квадрат модуля)

$$|\dot{v}|^2 = v_r^2 + v_i^2 = \dot{v}\dot{v}^*, \quad [1.8.3]$$

таким образом, мощность комплексного сигнала равна сумме мощностей действительной и мнимой составляющих.

### 1.9. Сравнение сигналов

Выше было показано, что при определенном выборе составляющих сигнала его энергия или мощность равны энергии или мощности его составляющих. Напрашивается аналогия с геометрическим представлением векторов в прямоугольной системе

координат, когда квадрат длины вектора равен сумме квадратов его проекций, которые можно считать составляющими вектора. Этой аналогией мы и воспользуемся.

Для двух векторов  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$ , определенных в прямоугольной системе координат, ответ на вопрос: какая часть вектора  $\vec{v}_1$  лежит на направлении вектора  $\vec{v}_2$ , состоит в том, что эта часть равна проекции вектора  $\vec{v}_1$  на линию  $v_2$ . Пусть эта проекция равна  $c_{12}\vec{v}_2$ , где  $c_{12}$  – скалярный множитель, величина которого выбирается из условия минимальной длины разностного вектора  $\vec{r} = \vec{v}_1 - c_{12}\vec{v}_2$ , т. к. он должен совпадать с перпендикуляром, опущенным из конца вектора  $\vec{v}_1$  на линию  $v_2$  (быть ортогональным к  $v_2$ ). Таким образом, векторы  $c_{12}\vec{v}_2$  и  $\vec{r}$  являются проекциями вектора  $\vec{v}_1$  в новой системе координат.

Аналитически задача сводится к нахождению минимума функции путем вариации параметра  $c_{12}$ . Квадрат длины разностного вектора  $|\vec{r}|^2$  равен сумме квадратов длин его ортогональных составляющих, или просто его проекций, в исходной системе координат  $x, y$ :

$$|\vec{r}|^2 = (v_{1x} - c_{12}v_{2x})^2 + (v_{1y} - c_{12}v_{2y})^2. \quad [1.9.1]$$

Условие минимальной длины разностного вектора определяется из уравнения:

$$\frac{d}{dc_{12}} |\vec{r}|^2 = \frac{d}{dc_{12}} \sum_k (v_{1k} - c_{12}v_{2k})^2 = 0, \quad [1.9.2]$$

$$\text{откуда получаем: } c_{12} = \frac{\sum v_{1k} v_{2k}}{\sum v_{2k}^2} = \frac{\vec{v}_1 \vec{v}_2}{|\vec{v}_2|^2}. \quad [1.9.3]$$

Сумма в числителе есть скалярное произведение двух векторов, равное произведению их длин на косинус угла между ними.

Знаменатель равен квадрату модуля длины вектора  $\vec{v}_2$ . Таким образом, полученная формула позволяет вычислить проекцию вектора  $\vec{v}_1$  на направление  $v_2$ .

Другими словами,  $c_{12} \left| \vec{v}_2 \right|^2$  есть часть вектора  $\vec{v}_2$ , заключенная в  $\vec{v}_1$ . Аналогичным образом можно найти коэффициент

$$c_{21} = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\left| \vec{v}_1 \right|^2}. \quad [1.9.4]$$

$$\text{Очевидно, что } c_{12} \left| \vec{v}_2 \right|^2 = c_{21} \left| \vec{v}_1 \right|^2. \quad [1.9.5]$$

Коэффициент  $C = c_{12} c_{21} = \cos(\text{угол между векторами})$  является удобной мерой их сходства. Квадрат длины суммарного вектора:

$$\begin{aligned} \left| \vec{S} \right|^2 &= \left( v_{1a} + v_{2a} \right)^2 + \left( v_{1b} + v_{2b} \right)^2 = \\ &= \left| \vec{v}_1 \right|^2 + \left| \vec{v}_2 \right|^2 + c_{12} \left| \vec{v}_2 \right|^2 + c_{21} \left| \vec{v}_1 \right|^2. \end{aligned} \quad [1.9.6]$$

Отметим, что нулевая величина любого из коэффициентов ( $c_{12}$  или  $c_{21}$ ) автоматически означает нулевое значение другого и соответствует ортогональности векторов.

Применительно к электрическим сигналам сказанное выше означает, что для ортогональных сигналов суммарная мощность равна сумме их мощностей и такие сигналы являются полностью независимыми. То же самое в полной мере относится и к ортогональным составляющим любого сложного сигнала. Таким образом, рассмотренные выше составляющие – постоянная и переменная, четная и нечетная, действительная и мнимая и т. д. являются ортогональными.

Для двух сигналов  $v_1$  и  $v_2$ , по аналогии с векторами, можно определить коэффициенты, называемые коэффициентами корреляции:

$$c_{12} = \frac{\int v_1 v_2 dt}{\int v_2^2 dt}; \quad c_{21} = \frac{\int v_1 v_2 dt}{\int v_1^2 dt}. \quad [1.9.7]$$

Коэффициент корреляции характеризует степень подобия сигналов и показывает, какую часть одного сигнала следует изъять из другого, чтобы, по аналогии с минимальной длиной разностного вектора, остаток ( $v_1 - c_{12}v_2$ ) имел минимальную энергию.

Равенство нулю коэффициента корреляции, естественно, означает ортогональность сигналов. При положительной корреляции энергия суммарного сигнала больше, а при отрицательной – меньше суммы энергий составляющих.

Полученные соотношения можно распространить на комплексные сигналы. Для этого рассмотрим выражение для квадрата модуля разностного комплексного сигнала:

$$\left| \dot{v}_1 - \dot{c}_{12} \dot{v}_2 \right|^2 = (\dot{v}_1 - \dot{c}_{12} \dot{v}_2) \left( \dot{v}_1^* + \dot{c}_{12}^* \dot{v}_2^* \right). \quad [1.9.8]$$

После несложных преобразований получаем:

$$\begin{aligned} \int \left| \dot{v}_1 - \dot{c}_{12} \dot{v}_2 \right|^2 dt &= \int \left| \dot{v}_1 \right|^2 dt - 2 \operatorname{Re} \left[ \dot{c}_{12}^* \int \dot{v}_1 \dot{v}_2^* dt \right] + \\ &+ \left| \dot{c}_{12} \right|^2 \int \left| \dot{v}_2 \right|^2 dt. \end{aligned} \quad [1.9.9]$$

Представим средний интеграл и  $\dot{c}_{12}$  в виде:

$$\int \dot{v}_1 \dot{v}_2^* = A^{j\theta_1} \text{ и } \dot{c}_{12} = \left| \dot{c}_{12} \right| e^{j\theta_2}. \quad [1.9.10]$$

Интеграл энергии разностного сигнала будет минимален при максимальном значении действительной части величины в скобках. Это выполняется при  $\theta_1 = \theta_2$ . В результате получаем:

$$\int \left| \dot{v}_1 - \dot{c}_{12} \dot{v}_2 \right|^2 dt = \int \left| \dot{v}_1 \right|^2 dt - 2 \left| \dot{c}_{12} \right| A + \left| \dot{c}_{12} \right|^2 \int \left| \dot{v}_2 \right|^2 dt. \quad [1.9.11]$$

Минимум по абсолютной величине  $c_{12}$  находим обычным образом:

$$|\dot{c}_{12}| = \frac{A}{\int |\dot{v}_2|^2 dt}. \quad [1.9.12]$$

Умножив обе части равенства на  $e^{j\theta}$ , получим:

$$\dot{c}_{12} = \frac{\int \dot{v}_1 \dot{v}_2^* dt}{\int |\dot{v}_2|^2} \text{ и } \dot{c}_{21} = \frac{\int \dot{v}_1 \dot{v}_2^* dt}{\int |\dot{v}_1|^2}. \quad [1.9.13]$$

### 1.10. Корреляционная функция

Всякий сигнал полностью коррелирован сам с собой, но можно ожидать, что степень корреляции будет меньше, если сравнивать сигнал с его копией, сдвинутой во времени.

Зависимость корреляции от этого сдвига характеризуется *автокорреляционной функцией* (АКФ) импульсного сигнала:

$$\psi(\tau) = \int \dot{v}(t) \dot{v}^*(t - \tau) dt = \int \dot{v}(t + \tau) \dot{v}^*(t) dt. \quad [1.10.1]$$

При  $\tau = 0$  значение автокорреляционной функции равно энергии сигнала

$$\psi(0) = \int |\dot{v}|^2 dt. \quad [1.10.2]$$

*Взаимная корреляционная функция* двух сигналов определяется как

$$\psi_{12}(\tau) = \int \dot{v}_1(t) \dot{v}_2^*(t - \tau) dt = \int \dot{v}_1(t + \tau) \dot{v}_2^*(t) dt. \quad [1.10.3]$$

Это определение справедливо, если хотя бы один сигнал является импульсным (конечной энергией). Заметим также, что при  $\tau = 0$  взаимная корреляционная функция равна интегралу в числителе выражения для коэффициента корреляции:

$$\psi_{12}(0) = \int \dot{v}_1 \dot{v}_2^* dt. \quad [1.10.4]$$

Аналогично [1.10.3] для  $\psi_{21}$  можно записать:

$$\psi_{21}(\tau) = \int \dot{v}_2(t) \dot{v}_1^*(t - \tau) dt = \int \dot{v}_2(t + \tau) \dot{v}_1^*(t) dt. \quad [1.10.5]$$

Очевидно, что  $\psi_{12}(\tau) = \dot{\psi}_{21}^*(-\tau)$  и, в частности,

$$\psi_{11}(\tau) = \dot{\psi}_{11}^*(-\tau). \quad [1.10.6]$$

Таким образом, автокорреляционная функция и сопряженная с ней симметричны, причем действительная часть является четной, а мнимая – нечетной функцией от  $\tau$ .

Определенные ранее коэффициенты корреляции связаны с корреляционными функциями простыми соотношениями:

$$\dot{c}_{12} = \frac{\dot{\psi}_{12}(\tau)}{\psi_{22}(0)}, \quad \dot{c}_{21} = \frac{\dot{\psi}_{21}(\tau)}{\psi_{11}(0)}. \quad [1.10.7]$$

Площадь под кривой корреляционной функции

$$\int \dot{\psi}_{12}(\tau) d\tau = \int (\int \dot{v}_1(t) \dot{v}_2^*(t - \tau) dt) d\tau. \quad [1.10.8]$$

Если  $\dot{v}_2(t)$  является сигналом конечной энергии (ограничен во времени), то интеграл по  $d\tau$  от  $\dot{v}_2(t - \tau)$  не зависит от  $t$

$$\int \dot{\psi}_{12}(\tau) d\tau = \left( \int \dot{v}_1(t) dt \right) \left( \int \dot{v}_2(t) dt \right)^*, \quad [1.10.9]$$

т.е. площадь под кривой корреляционной функции двух сигналов равна произведению площадей под функциями коррелируемых сигналов.

Если  $\dot{v}_1(t)$  – сигнал конечной мощности, а  $\dot{v}_2(t)$  – конечной энергии, то интегрирование  $\dot{v}_1(t)$  можно заменить усреднением:

$$\overline{\psi}_{12} = \overline{\dot{v}_1} \left( \int \dot{v}_2(t) dt \right)^*. \quad [1.10.10]$$

При анализе сигналов часто оказывается возможным представить сложный сигнал  $v_3$  в виде корреляционной функции двух более простых сигналов  $v_1$  и  $v_2$ . В этом случае можно установить удобные соотношения между АКФ сигналов  $v_1$ ,  $v_2$  и  $v_3$ .

Для упрощения последующих записей введем обозначение:

$$\overset{\circ}{f} = f^*(-t), \quad [1.11.1]$$

что означает сопряженную симметрию по отношению к  $f(t)$ .

Операция свертки

$$v_1 \otimes v_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(\xi) v_2(t - \xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} v_2(\xi) v_1(t - \xi) d\xi \quad [1.11.2]$$

образует новую временную функцию из двух исходных. Очевидно, что

$$v_1 \otimes v_2 = v_2 \otimes v_1. \quad [1.11.3]$$

Из [1.10.5] и [1.10.6] следует:

$$\psi_{11} = v_1 \otimes v_1 = \overset{\circ}{\psi}_{11}, \quad [1.11.4]$$

$$\psi_{12} = v_1 \otimes v_2 = \overset{\circ}{\psi}_{21}. \quad [1.11.5]$$

Обозначим как  $\psi_{12,12}$  автокорреляционную функцию  $\psi_{12}$ :

$$\psi_{12,12} = \psi_{12} \otimes \overset{\circ}{\psi}_{12}. \quad [1.11.6]$$

$$\text{С учетом [1.11.5]} \quad \psi_{12,12} = (v_1 \otimes v_2) \otimes (v_1 \otimes v_2). \quad [1.11.7]$$

Так как операции свертки ассоциативны, то их можно проводить в любом порядке:

$$\psi_{12,12} = (v_1 \otimes v_1) \otimes (v_2 \otimes v_2), \quad [1.11.8]$$

$$\text{что эквивалентно: } \psi_{12,12} = \psi_{11} \otimes \overset{\circ}{\psi}_{22} = \overset{\circ}{\psi}_{11,22}. \quad [1.11.9]$$

Следовательно, если сигнал  $v_3(t) = \psi_{12}(t)$ , т. е. равен взаимной корреляционной функции сигналов  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$ , то его автокорреляционная функция  $\psi_{33}(t)$  равна взаимной корреляционной функции автокорреляционных функций сигналов  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$ .

Для сигналов конечной мощности интеграл для  $\psi$  можно заменить средним значением  $\varphi$ , определяемым соотношением:

$$\varphi(t) = v(t)v^*(t-\tau) = v(t+\tau)v^*(t). \quad [1.11.10]$$

Обе функции  $\varphi$  и  $\psi$  называются корреляционными, но каждая имеет свою область применения. Соотношения, полученные для  $\psi$ , справедливы и для  $\varphi$  после соответствующей замены интегралов на средние значения:

$$\varphi(0) = \overline{|v|^2}, \quad [1.11.11]$$

$$\varphi_{12}(\tau) = \overline{\dot{v}_1(t)v_2^*(t-\tau)} = \overline{\dot{v}_1(t+\tau)v_2^*(t)}, \quad [1.11.12]$$

$$\varphi_{12}(0) = \overline{\dot{v}_1v_2^*}, \quad [1.11.13]$$

$$\varphi_{12}(\tau) = \varphi_{21}^*(-\tau), \quad [1.11.14]$$

$$\varphi_{11}(\tau) = \varphi_{11}^*(-\tau), \quad [1.11.15]$$

$$c_{12}(\tau) = \frac{\varphi_{12}(\tau)}{\varphi_{22}(0)}, \quad [1.11.16]$$

$$c_{21}(\tau) = \frac{\varphi_{21}(\tau)}{\varphi_{11}(0)}, \quad [1.11.17]$$

$$c_{12}(\tau) = \frac{|\varphi_{12}(\tau)|^2}{\varphi_{11}(0)\varphi_{22}(0)}. \quad [1.11.18]$$

### 1.12. Тригонометрический ряд Фурье для периодических сигналов

Преобразование Фурье является одним из способов разложения сигнала на ортогональные составляющие, в качестве которых в данном случае выступают синусоидальные колебания с различными частотами, в том числе с  $f = 0$  (постоянная составляющая).

Для периодического сигнала с основным периодом  $T$  можно ожидать, что частоты составляющих  $f_n = \frac{n}{T}$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , т. к. лишь синусоиды с такими частотами являются периодическими в интервале  $T$ . Синусоида с частотой  $f_n$  называется  $n$ -й гармоникой сигнала; гармонику  $f_1$  называют основной гармоникой, т. к. она имеет тот же период, что и сигнал. Нулевая гармоника равна среднему по времени значению сигнала, или постоянной составляющей.

Любые две синусоиды с неодинаковыми частотами являются ортогональным. Действительно:

$$\begin{aligned} \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t &= \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t \Rightarrow 0 \text{ при } \omega_1 \neq \omega_2, \\ &= \frac{1}{2} \text{ при } \omega_1 = \omega_2 \neq 0. \end{aligned} \quad [1.12.1]$$

$$\cos \omega_1 t \sin \omega_2 t = 0 \quad \text{при любых } \omega_1 \text{ и } \omega_2.$$

Ортогональность составляющих ряда Фурье означает, что при удалении из сигнала любой составляющей остальные не меняют своей величины, т. е. они независимы также, как независимы ортогональные составляющие пространственного вектора.

Периодический сигнал  $v(t)$  с периодом  $T$  ортогонален ко всем синусоидам за исключением синусоид с частотами  $\omega_n = 2\pi n / T$ . Таким образом,

$$\overline{v(t) \cos \omega_n t} = \overline{v(t) \sin \omega_n t} = 0 \text{ при } \omega \neq \omega_n. \quad [1.12.2]$$

Содержание гармоник в сигнале можно описать коэффициентами корреляции, обычно называемыми коэффициентами ряда Фурье:

$$a_n = \frac{\overline{v(t) \cos \omega_n t}}{\overline{\cos \omega_n t}} = \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \cos \omega_n t dt, \quad [1.12.3]$$

$$b_n = \frac{\overline{v(t) \sin \omega_n t}}{\overline{\sin \omega_n t}} = \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \sin \omega_n t dt, \quad [1.12.4]$$

$$c_n = \overline{2v(t)} = \frac{2}{T} \int_0^T v(t) dt. \quad [1.12.5]$$

Здесь  $v(t)$ ,  $\cos \omega_n t$  и  $a_n$  (как и  $\sin \omega_n t$  и  $b_n$ ) имеют тот же смысл, что  $v_1$ ,  $v_2$  и  $c_{12}$  в [1.9.7]. Точно так же, как величина  $c_{12}v_2$  выражает составляющую сигнала  $v_1$ ,  $a_n \cos \omega_n t$  и  $b_n \sin \omega_n t$  являются гармоническими составляющими сигнала  $v(t)$ . Очевидно, что  $v(t)$  равен сумме (по  $n$ ) этих составляющих. Для точного представления сигнала требуется бесконечное число гармоник, сумма конечного их числа называется конечным рядом Фурье и является аппроксимацией реального сигнала:

$$v(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k \left( a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t \right) + \epsilon_k(t). \quad [1.12.6]$$

Здесь  $\epsilon_k(t)$  есть ошибка аппроксимации. Поскольку эта ошибка является остатком после выделения ортогональных составляющих, то гармоники ортогональны к ошибке. Следовательно

$$\overline{v^2} = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \left( a_n^2 + b_n^2 \right) + \epsilon_k^2. \quad [1.12.7]$$

Для данного  $k$  это наилучшая аппроксимация по *среднему квадрату*.

Более распространена следующая форма записи ряда Фурье:

$$v(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^k c_n \cos(\omega_n t - \varphi_n), \quad [1.12.8]$$

где  $c_0 = a_0$ ;  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ;  $a_n = c_n \cos \varphi_n$ ;  $b_n = c_n \sin \varphi_n$ ;  
 $\varphi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}$ .

### *Спектральные функции*

Спектральные функции периодического сигнала  $v(t)$  имеют вид:

$$A_f = \frac{1}{\pi} \int_0^T v(t) \cos \omega_n t dt; \quad B_f = \frac{1}{\pi} \int_0^T v(t) \sin \omega_n t dt \quad [1.12.9]$$

и связываются не с номером данной гармоники, а с её частотой. Амплитуды гармоник связаны со значением спектральных функций на частоте гармоник соотношениями:

$$a_f = \frac{2\pi}{T} A_f = 2\pi f_1 A_f; \quad b_f = \frac{2\pi}{T} B_f = 2\pi f_1 B_f, \quad [1.12.10]$$

где  $f_1 = 1/T$ .

Спектральные функции удобны тем, что их значения не зависят от периода сигнала. Если при неизменной форме сигнала  $v(t)$  изменять его период, то соотношение между амплитудами гармоник данных частот (*не номеров!*), если они существуют, остается неизменным. Абсолютная величина амплитуд гармоник при этом изменяется обратно пропорционально периоду сигнала.

Для ряда [1.12.8] очевидно, что

$$c_f = \sqrt{A_f^2 + B_f^2}; \quad c_f = 2\pi f_1 C_f. \quad [1.12.11]$$

Все сказанное об  $A_f$  и  $B_f$  справедливо и для  $C_f$ . Что касается

фазы, то  $\varphi_f = \arctg \frac{b_f}{a_f} = \arctg \frac{B_f}{A_f}.$  [1.12.12]

## 1.13. Экспоненциальный ряд Фурье

Ряд Фурье можно представить в более компактном виде, если воспользоваться комплексной показательной функцией (формула Эйлера):

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t. \quad [1.13.1]$$

Так как среднее значение  $\overline{e^{j\omega t}} = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega = 0 \\ 0 & \text{при } \omega \neq 0 \end{cases}$ , [1.13.2]

то, следовательно, две комплексные показательные функции ортогональны, если их частоты неодинаковы:

$$\overline{e^{j\omega_1 t} \left( e^{j\omega_2 t} \right)^*} = \overline{e^{j(\omega_1 - \omega_2)t}} = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega_1 = \omega_2 \\ 0 & \text{при } \omega_1 \neq \omega_2 \end{cases}. \quad [1.13.3]$$

Следует также иметь в виду, что комплексные показательные функции с частотами  $+\omega$  и  $-\omega$  ортогональны, в то время как  $\sin \omega t$  (как и  $\cos \omega t$ ) не ортогональна  $\sin(-\omega t)$ . Поэтому при разложении периодического сигнала по экспоненциальным гармоникам следует учитывать и отрицательные частоты, в противном случае выпадает половина гармоник и ряд будет неполным.

Из [1.13.1] следует, что  $\cos \omega t = \frac{(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})}{2}$ ,

следовательно, из [1.12.8]:

$$v(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[ e^{j(\omega_n t - \varphi_n)} + e^{-j(\omega_n t - \varphi_n)} \right] / 2. \quad [1.13.4]$$

Учитывая, что  $c_n = c_{-n}$ ;  $\varphi_n = -\varphi_{-n}$ ;  $\omega_n = -\omega_{-n}$ , получаем:

$$v(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j(\omega_n t - \varphi_n)}, \quad [1.13.5]$$

или  $v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{v}_n e^{j\omega_n t}$ ,  $\dot{v}_n = \frac{1}{2} c_n e^{-j\varphi_n} = \frac{1}{2} (a_n - j b_n)$  [1.13.6]

есть коэффициент корреляции (амплитуда) для экспоненциальной составляющей с частотой  $\omega_n = n\omega_1 = 2\pi n/T$ :

$$\dot{v}_n = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) (\cos \omega_n t - j \sin \omega_n t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) e^{-j\omega_n t} dt, \quad [1.13.7]$$

что, впрочем, прямо следует из [1.10.3], если положить  $\dot{v}_1 = v(t)$  и

$$v_2^* = e^{-j\omega_n t}.$$

И, наконец, для мощности (см.[1.12.7]) имеем:

$$\overline{v^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\dot{V}_n|^2. \quad [1.13.8]$$

Автокорреляционная функция сигнала, представленного в виде ряда, записывается следующим образом:

$$\varphi(\tau) = \sum_1^1 \dot{v}_1 e^{j\omega_1 t} \sum_n \dot{v}_n e^{j\omega_n(t-\tau)}. \quad [1.13.9]$$

При усреднении с учетом ортогональности составляющих большинство произведений исчезает и остается простое выражение:

$$\varphi(\tau) = \sum_n |\dot{V}_n|^2 e^{j\omega_n \tau}. \quad [1.13.10]$$

Поскольку автокорреляционная функция периодического сигнала является периодической, то она может быть представлена в виде ряда

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n e^{j\omega_n \tau} \quad [1.13.11]$$

с коэффициентами

$$\Phi_n = \varphi(\tau) e^{-j\omega_n \tau}. \quad [1.13.12]$$

Из [1.13.10] и [1.13.11] следует, что  $\Phi_n = |\dot{V}_n|^2$ . [1.13.13]

Таким образом, коэффициент  $\Phi_n$  ряда Фурье для автокорреляционной функции сигнала  $v(t)$  равен средней

мощности, переносимой  $n$ -й экспоненциальной гармоникой сигнала. При  $\tau = 0$  выражение [1.13.11] сводится к сумме  $\Phi_n$ .

Поскольку  $\varphi(0)$  равна средней мощности сигнала, выражение [1.13.11] означает, что мощность сигнала, как и следовало ожидать, равна сумме мощностей ортогональных составляющих.

#### 1.14. Интеграл Фурье для импульсного сигнала

Чтобы получить выражение интеграла Фурье для импульсного сигнала, будем исходить из выражений [1.13.6] и [1.13.7] для ряда Фурье:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{T} \int_0^T v(t) e^{-j\omega_n t} dt \right) e^{j\omega_n t}. \quad [1.14.1]$$

Пусть имеется сигнал, состоящий из неперекрывающихся импульсов длительностью  $\delta$ , следующих с периодом  $T$ . С увеличением периода частота основной гармоники и, следовательно, интервал между соседними гармониками уменьшаются. Поэтому

$\frac{1}{T} = \frac{\omega_1}{2\pi}$  стремится к  $\frac{d\omega}{2\pi}$ , а сумма – к интегралу:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_0^{\delta} v(t) e^{-j\omega t} dt \right) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{V}(\omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad [1.14.2]$$

где  $v(t) = \int_0^{\delta} v(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt.$  [1.14.3]

Функция  $\dot{V}(\omega)$  называется спектром сигнала и может быть интерпретирована как спектр плотности напряжения, имеющий размерность  $в \cdot сек \equiv в / гц$ . Следовательно, площадь под кривой  $\dot{V}(\omega)$  и осью частот имеет размерность напряжения. Импульсный сигнал имеет непрерывное распределение частотных составляющих, причем каждая из них бесконечно мала. В этом смысле составляющая «на данной частоте»  $\omega_a$  имеет амплитуду

$\dot{V}(\omega_a)d\omega/2\pi$ , равную площади под кривой между частотами  $\omega_a$  и  $\omega_a + d\omega$ .

По аналогии с [1.13.8] при нулевом значении ошибки можно записать:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |V|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |V(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}, \quad [1.14.4]$$

а из [1.13.11] – [1.13.13] следует, что

$$\Psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad [1.14.5]$$

$$\Psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega) e^{-j\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad [1.14.6]$$

$$\Psi(\omega) = |V(\omega)|^2, \quad [1.14.7]$$

где  $\Psi(\omega)$  представляет спектр плотности энергии сигнала.

Если разделить сигнал и экспоненциальную функцию в [1.14.3] на четную и нечетную части, то получим:

$$V(\omega) = 2 \int_0^{\infty} V_e(t) \cos \omega t dt - j2 \int_0^{\infty} V_0(t) \sin \omega t dt. \quad [1.14.8]$$

$$\text{Для действительного сигнала } V(\omega) = V^*(-\omega). \quad [1.14.9]$$

Покажем, что ряд Фурье можно трактовать как частный случай интеграла Фурье. Это позволит единообразно трактовать периодические и импульсные сигналы.

Выделим из периодического сигнала  $k$  периодов и будем считать сигнал вне этого интервала равным нулю. Этому усеченному сигналу будет соответствовать спектр:

$$V_{(k)}(\omega) = \int_{-kT/2}^{kT/2} V(t) e^{-j\omega t} dt. \quad [1.14.10]$$

При  $k = 1$  имеем импульс, состоящий из одного периода. Интеграл [1.14.10] совпадает с интегралом в выражении [1.13.7] для

коэффициентов корреляции  $V_n$ . Обозначим как  $V_\omega$  коэффициент корреляции при произвольной частоте  $\omega$ , тогда

$$V_1(\omega) = TV_\omega. \quad [1.14.11]$$

При  $k > 1$  интеграл [1.14.10] можно рассматривать как сумму  $k$  импульсных сигналов, каждый из которых имеет длительность  $T$  и сдвинут на один период относительно смежных импульсов.

Воспользовавшись формулой сдвига [П2.4] можно записать:

$$V_k(\omega) = TV_\omega \sum_{n=-m}^m e^{-jn\omega T}, \quad k = 2m + 1. \quad [1.14.12]$$

Заменяя ряд его суммой (сумма членов геометрической прогрессии), получаем:

$$V_k(\omega) = TV_\omega \left[ \frac{\sin(k\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)} \right]. \quad [1.14.13]$$

На рис. 1 показан переход от непрерывного спектра одиночного импульса к дискретному спектру периодических сигналов путем добавления новых импульсов. На этих графиках  $T/\delta = 5$ , но качественно картина будет такой же при любой другой длительности или форме импульса.

Квадрат абсолютной величины  $V(\omega)$  представляет собой спектр плотности энергии импульсного сигнала. Квадрат линейного импульса имеет бесконечную площадь, поэтому спектр плотности энергии для периодического сигнала не имеет смысла, однако каждая гармоника периодического сигнала при бесконечной энергии имеет конечную мощность, поэтому спектр плотности мощности периодического сигнала должен состоять из импульсов конечной площади.

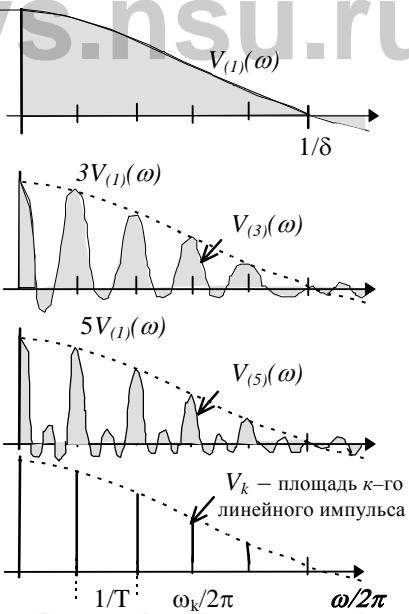
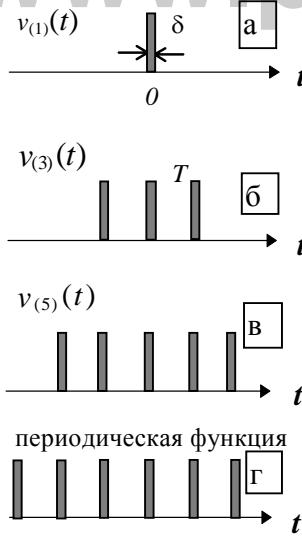


Рис. 1

Почти периодический сигнал можно представить с любой точностью в виде суммы двух или более рядов Фурье, следовательно, спектры плотности напряжения и плотности мощности почти периодического сигнала образуются наложением спектров периодических составляющих сигнала. Если построить почти периодический сигнал из большого числа очень малых периодических составляющих, периоды которых находятся в иррациональных отношениях, то соответствующий спектр плотности энергии будет состоять из сколь угодно плотно расположенных бесконечно малых линейных импульсов. Иначе говоря, спектр плотности энергии содержит некоторую мощность в каждом малом частотном интервале, поэтому его можно представить в виде непрерывного спектра. Почти периодический сигнал представляет переход между периодическими и случайными сигналами. Случайный сигнал, взятый из стационарного процесса, подобно периодическому сигналу характеризуется спектром плотности мощности, но спектр является непрерывным, а не дискретным.

## 2. Передача сигналов через линейные системы

Ранее были рассмотрены различные составляющие сигналов, в частности, было показано, что сигнал может быть описан либо как функция времени, либо как функция частоты. Эти два способа представления сигналов связаны интегралом Фурье.

В этой главе будет рассмотрен вопрос о трансформации временной функции сигнала при его прохождении через линейные системы передачи, являющиеся эквивалентами электронных цепей при малых сигналах.

### 2.1. Линейная передающая система

Линейной называется система, у которой реакция на сумму двух или более входных сигналов равна сумме реакций на каждый из входных сигналов, действующих раздельно. Таким образом, если  $f_1(t)$  и  $g_1(t)$  – два входных сигнала, а  $f_2(t)$  и  $g_2(t)$  – соответствующие выходные сигналы, то входной сигнал

$$V_1(t) = a f_1(t) + b g_1(t)$$

создает выходной сигнал

$$V_2(t) = a f_2(t) + b g_2(t)$$

для любых  $a$  и  $b$ . Очень часто система может давать выходной сигнал в отсутствие внешних воздействий, благодаря внутренним источникам энергии. Здесь мы имеем в виду только ту часть выходного сигнала, которая определяется внешним воздействием. Если внутренних источников нет, то такая система называется однородной, и далее, если это особо не оговорено, будут подразумеваться однородные системы.

### Сингулярные сигналы

Для описания свойств линейных систем во временной области используется их реакция на входные сигналы специального вида – скачок напряжения (тока) и единичный импульс (сигнал с длительностью, стремящейся к нулю, и единичной площадью). В первом случае реакция системы (выходной сигнал) называется переходной функцией  $F(t)$ , во втором – импульсной характеристикой  $h(t)$ .

На рис. 2.1 изображена простейшая линейная «система», состоящая из идеальных генератора ступеньки напряжения и емкости. Требуется найти временную функцию тока в емкости.

Однако даже в таком простом случае возникает трудность, состоящая в том, что ток в цепи пропорционален производной

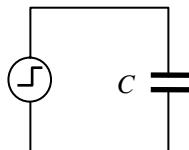


Рис. 2.1

$i_c(t) = C \frac{dU(t)}{dt}$ , а производная не существует при  $t = 0$ , где  $i_c(t)$  имеет разрыв. Но ток несомненно протекает, т. к. емкость заряжается, следовательно, математическое описание не соответствует реальности.

Трудность возникла из-за идеализации элементов схемы и может быть устранена заменой разрыва функции коротким интервалом  $t_0$  быстрого, но имеющего конечную скорость линейного нарастания (рис. 2.2).

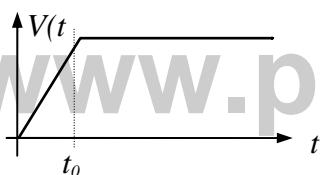


Рис. 2.2

Производная в этом случае существует и имеет вид прямоугольного импульса длительностью  $t_0$  и амплитудой  $1/t_0$ . С точностью до множителя  $C$  (величина емкости) эта функция совпадает с формой тока в емкости. При  $t_0 \rightarrow 0$  эта функция приближается к линейному импульсу – очень короткому импульсу

с конечной площадью. В данном случае эта площадь пропорциональна заряду (площадь под кривой тока), что соответствует физике процесса – изменение напряжения на ёмкости требует передачи ей определенного заряда.

Часто система генерирует выходной сигнал даже в отсутствие внешних (входных) воздействий, благодаря внутренним источникам энергии. В дальнейшем мы будем считать, что система не содержит внутренних источников.

Имеются две особенности, которые уместно подчеркнуть. Во-первых, если входное воздействие возникает в момент времени  $t = 0$ , то импульсная характеристика (и переходная функция) равна нулю при отрицательном времени. Это свойство, называемое физической реализуемостью, означает, что нельзя создать систему,

которая начинала бы реагировать на сигнал до его поступления на её вход:

$$h(t) = 0, \text{ для } t < 0.$$

Во-вторых, в устойчивых системах импульсная характеристика стремится к нулю при большом положительном времени. Это означает, что система со временем «забывает» о воздействии и возвращается в состояние покоя:

$$h(t) \rightarrow 0, \text{ для } t \rightarrow \infty.$$

В системах с постоянными параметрами (стационарные системы) форма отклика не зависит от времени подачи входного воздействия. Если  $f_1(t)$  – входной сигнал, а  $f_2(t)$  – соответствующий ему выходной, то входной сигнал вида  $V_1 = f_1(t - t_1)$  создает выходной сигнал вида  $V_2 = f_2(t - t_1)$  при любом  $t_1$ .

К линейным системам применим принцип суперпозиции. Под этим подразумевается, что наложение входных сигналов приводит к наложению соответствующих выходных сигналов.

Существуют и используются несколько методов расчета реакции линейных систем на входное воздействие.

## 2.2. Классический метод

Исследование переходных процессов классическим методом сводится к решению системы дифференциальных уравнений вида:

$$i_k R_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k dt = V_k, \quad [2.2.1]$$

или

$$R_k \frac{di_k}{dt} + L_k \frac{d^2 i_k}{dt^2} + \frac{1}{C_k} i_k = \frac{dV_k}{dt}. \quad [2.2.2]$$

В общем случае решением таких уравнений является сумма общего решения системы однородных дифференциальных уравнений, определяющих токи и напряжения, обусловленные запасом энергии в реактивных элементах системы (емкости, индуктивности) при отсутствии внешних воздействий (свободные колебания), и частного решения, которое зависит от вида

воздействия и представляет собой решение для установившегося режима.

Так как запас энергии в элементах ограничен, то при наличии даже минимальных потерь свободные колебания со временем затухнут (устойчивая система), так что при  $t \rightarrow \infty$  будут наблюдаться только вынужденные колебания (установившийся процесс).

В чистом виде этот метод, ввиду своей сложности, практически не может быть использован для ручного расчета сложных систем, но широко используется в программах компьютерного моделирования электронных схем.

### 2.3. Метод интеграла Фурье

Этот метод может быть использован, если входное воздействие представляет абсолютно интегрируемую функцию. В этом случае непериодическое воздействие описывается интегралом:

$$V_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad [2.3.1]$$

где

$$S_1(j\omega) = \int_0^{\infty} V_1(t) e^{-j\omega t} dt \quad [2.3.2]$$

есть спектральная характеристика входного напряжения.

Аналогично, сигнал на выходе системы

$$V_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_2(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad [2.3.3]$$

и спектральная плотность

$$S_2(j\omega) = \int_0^{\infty} V_2(t) e^{-j\omega t} dt. \quad [2.3.4]$$

Так как амплитуды комплексных сигналов на входе и выходе связаны через комплексный коэффициент передачи

$$K(j\omega) = \frac{\dot{v}_{2m}}{\dot{v}_{1m}}, \quad [2.3.5]$$

а комплексные амплитуды пропорциональны спектральным плотностям, то

$$S_2(j\omega) = K(j\omega) S_1(j\omega). \quad [2.3.6]$$

Таким образом,

$$V_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) S_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad [2.3.7]$$

#### 2.4. Интеграл суперпозиции

Определение реакции линейной стационарной системы на входной сигнал произвольной формы при известной импульсной характеристике сводится к представлению входного сигнала в виде соприкасающихся коротких импульсов и суммированию реакций системы на каждый из этих импульсов, как показано на рис. 2.3.

Короткому импульсу с бесконечно малой площадью  $V_I(t)dt_I$  (рис. 2.3, a) соответствует столь же малая величина в выходном сигнале  $v_2(t)=[v_I(t)dt_I]h(t-t_I)$ , равная бесконечно малой величине

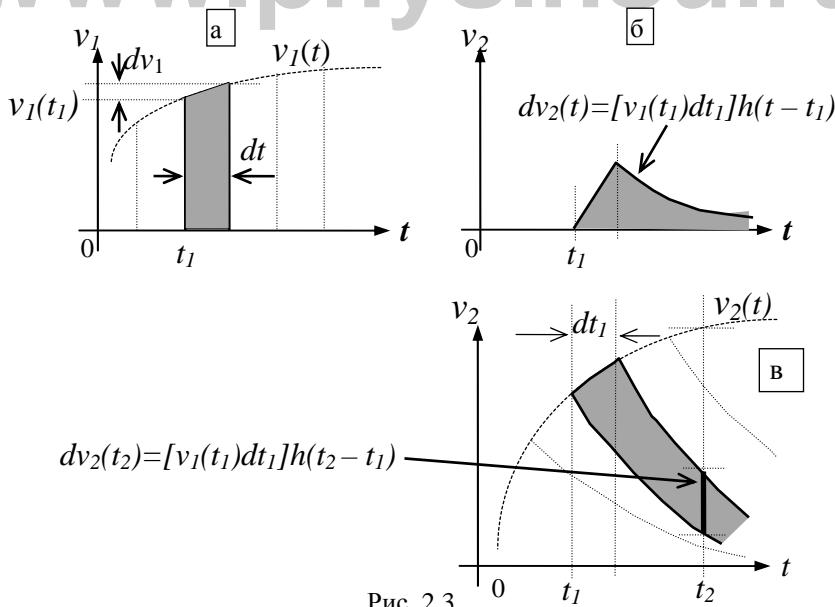


Рис. 2.3

31

*сдвинутой импульсной характеристики* (рис. 2.3, *б*). Полный сигнал в момент времени  $t_2$  (рис. 2.3, *в*) равен интегралу:

$$v_2(t_2) = \int_{-\infty}^{t_2} v_1(t_1)h(t_2 - t_1)dt_1, \quad [2.4.1]$$

называемому *интегралом суперпозиции*. В него входят три времени: время входного сигнала  $t_1$ , время выходного сигнала  $t_2$  и время памяти системы  $t_2 - t_1$ . Интегрирование ведется по значениям  $t_2 < t_1$ , т. к.  $h(t_2 - t_1) = 0$  при отрицательных значениях аргумента. Другими словами, реализуемая система «помнит» прошлое, но не «знает» будущего.

Интеграл суперпозиции словесно можно сформулировать так: *величина выходного сигнала в настоящий момент равна взвешенному интегралу от входного сигнала за прошлое время, причем весовым коэффициентом является импульсная характеристика, играющая роль памяти системы.*

Введя обозначения:  $t_2 - t_1 = \tau$  и  $t_2 = t$  получим:

$$v_2(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)v_1(t - \tau)d\tau. \quad [2.4.2]$$

Можно также использовать другую форму записи:

$$v_2(t) = \int_{-\infty}^t v_1(\tau)h(t - \tau)d\tau. \quad [2.4.3]$$

Обе записи с точностью до одного из пределов соответствуют обычной формуле свертки с учетом физической реализуемости системы – значение выходного сигнала системы в момент времени  $t$  не может зависеть от сигналов, поступивших на её вход после этого момента. Для реализуемой системы интегрирование нужно вести по «времени памяти» системы в пределах от 0 до  $\infty$ ; при интегрировании по времени прихода входного сигнала интегрирование ведется от  $-\infty$  до  $t$ .

Приведем ещё одну графическую интерпретацию интеграла суперпозиции. Как уже отмечалось, импульсная характеристика (рис. 2.4, *а*) входит в интеграл суперпозиции как функция памяти  $h(t_2 - t_1)$ . Можно изобразить функцию памяти в зависимости от  $t_2$  при  $t_1$  в качестве параметра (рис. 2.4, *б*), или рассматривать  $h(t_2 - t_1)$

как функцию времени входного сигнала  $t_1$  при  $t_2$  в качестве параметра (рис. 2.4, б).

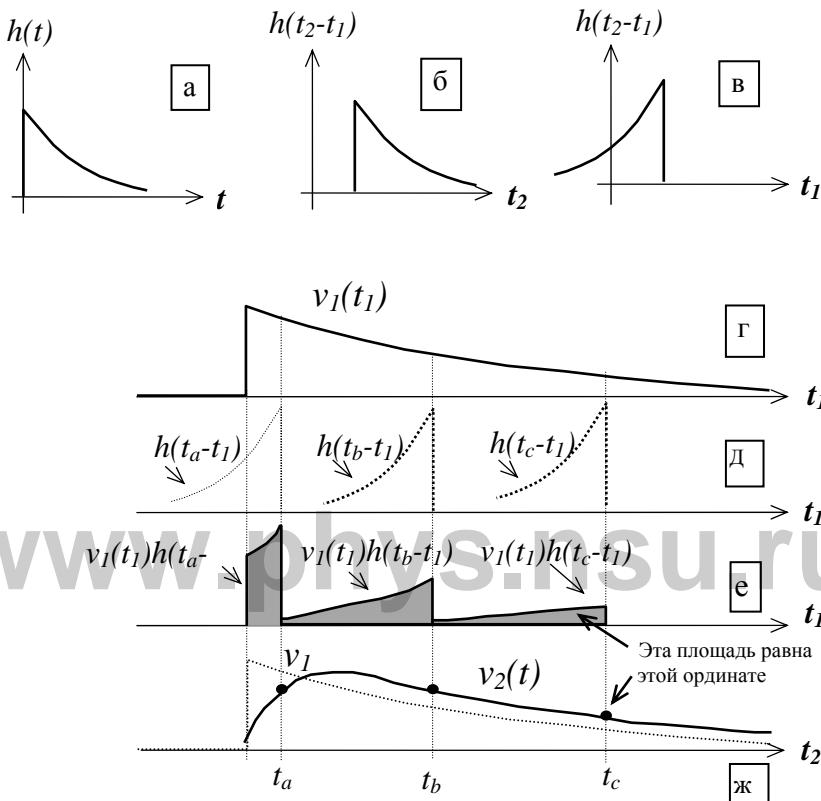


Рис. 2.4

Мы воспользуемся последним вариантом. Умножим входной сигнал (рис. 2.4, *г*) на функцию памяти (рис. 2.4, *д*) и получим взвешенный входной сигнал (рис. 2.4, *е*).

Площадь, ограниченная взвешенной кривой и осью времени входного сигнала, равна значению выходного сигнала (рис. 2.4, *ж*) в заданные моменты времени (рис. 2.4, *г*) для выходного сигнала  $t_a$ ,  $t_b$  и  $t_c$ . Если рассматривать умножение и интегрирование по времени как одновременные операции, то можно вообразить, что функция памяти «скользит» по временной функции входного сигнала,

порождая при этом последовательные мгновенные значения выходного сигнала.

Интеграл суперпозиции позволяет дать точное условие устойчивости. В устойчивой системе выходной сигнал имеет конечное значение при всех конечных входных сигналах, т. е. при  $|V_I(t)| \leq M$ , где  $M$  – положительное действительное конечное число. Откуда вытекает необходимое и достаточное условие устойчивости:

$$|v_2(t)| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau, \quad [2.4.4]$$

т. е. система устойчива, если её импульсная характеристика абсолютно интегрируема:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty. \quad [2.4.5]$$

## 2.5. Интеграл суперпозиции как корреляционная операция

Введенное в этом разделе понятие «функция памяти» применительно к импульсной характеристике с аргументом  $(t_2 - t_1)$  требует некоторого уточнения. Поскольку память обращена к прошлому, то естественно связать функцию памяти с величиной выходного сигнала в настоящий момент времени, возникшего в ответ на единичный импульс, поданный на вход  $t$  секунд назад. При таком определении функция памяти

$$m(t) = h(-t). \quad [2.5.1]$$

Подставляя это равенство в [2.4.3], получаем:

$$v_2(t) = \int_{-\infty}^t v_1(\tau) m(\tau - t) d\tau = \Psi_{Im}(t). \quad [2.5.2]$$

По существу, всякая линейная система передачи является коррелятором, выходной сигнал которого в каждый момент времени определяется степенью корреляции прошлого входного сигнала с функцией памяти.

К интегралу суперпозиции, как частному случаю операции свертки, применимы законы:

распределительный –  $A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$ ;

ассоциативный –  $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$ ;

коммутативный —  $A \otimes B = B \otimes A$ .

Первое правило очевидно, последнее можно получить заменой переменных в [2.4.3]. Второе выражение формально можно проверить, записав двойной интеграл по двум переменным, откуда будет видно, что порядок интегрирования не имеет значения.

Двойную свертку можно представить наглядно в виде последовательного соединения двух линейных систем (рис. 2.5).

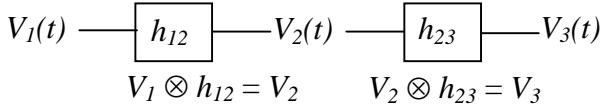


Рис. 2.5

Представим теперь, что на вход подан единичный импульс. В этом случае выходной сигнал по определению равен импульсной характеристике  $h_{13}$  всей системы, которая, в свою очередь, очевидно, равна свертке  $h_{12}$  и  $h_{23}$  (рис. 2.6).

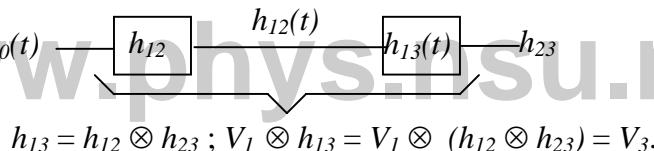


Рис. 2.6

Ассоциативный закон прямо следует из того, что свертка  $V_1$  и  $h_{13}$  должна дать выходной сигнал  $V_3$ .

Рисунки 2.5 и 2.6 иллюстрируют коммутативный закон, который, по существу, означает, что линейные системы, соединенные в последовательную цепь, можно располагать в любом порядке, при этом общая функция передачи будет оставаться неизменной.

## 3. Элементы аналоговой электроники

Аналоговая электроника (АЭ) включает в себя электронные устройства, коэффициент передачи (зависимость выходного сигнала от входного) которых носит непрерывный характер.

В процессе обработки сигналов в АЭ могут изменяться некоторые параметры сигналов, например, частотный спектр, но, в принципе, сохраняется возможность обратного преобразования.

Среди большого разнообразия устройств АЭ особое место занимает линейная электроника с зависимостью вида  $y = ax + b$  между параметрами входного и выходного сигналов. В дальнейшем, если это не будет оговорено особо, под АЭ будет подразумеваться линейная электроника.

Система перестает быть аналоговой, если в каком-то её звене нарушается непрерывность – появляется некий квант, с точностью до величины которого система различает изменения в сигнале. Это происходит, например, в преобразователях аналог – цифра, поэтому последние являются как бы переходом между двумя «мирами» – аналоговым и дискретным (цифровым).

Переход от аналогового к дискретному представлению сигналов носит необратимый характер, т. к. при этом переходе неизбежно теряется часть информации, содержащейся в сигнале, и не только из-за конечной точности преобразования (величины кванта), – дело в том, что в цифровую форму преобразуется только часть параметров сигнала. Таким образом, обратное преобразование в принципе не может вернуть всю исходную информацию, содержащуюся в сигнале.

Основными первичными активными элементами для построения устройств АЭ в настоящее время являются транзисторы – биполярные и полевые.

Активные элементы, соединенные соответствующим образом с помощью пассивных элементов (резисторы, ёмкости, индуктивности), образуют различные устройства для обработки сигналов. Наиболее распространенными из них являются усилители различных типов.

Простейший усилитель можно построить на одном транзисторе.

### 3.1. Основные схемы включения активных элементов (транзисторов)

Существуют три основных способа включения транзисторов: с «общим эмиттером», с «общим коллектором» (эмиттерный повторитель) и с «общей базой». Общим считается электрод, находящийся под неизменным потенциалом, часто – под нулевым потенциалом «земли».

### Схема с общим эмиттером

На рис. 3.1 показан усилитель на биполярном транзисторе *n-p-n* типа, включенном по схеме «с общим эмиттером».

Входной ток транзистора (ток базы) складывается из тока смещения, задающего рабочий режим транзистора, и тока сигнала.

Ток эмиттера, как известно, связан с напряжением  $U_{\delta\vartheta}$  на *p-n* переходе база – эмиттер экспоненциальной

зависимостью:

$$I_\vartheta = I_0 \exp\left(\frac{U_{\delta\vartheta}}{\varphi_T}\right) = (\beta + 1) I_\delta, \quad [3.1.1]$$

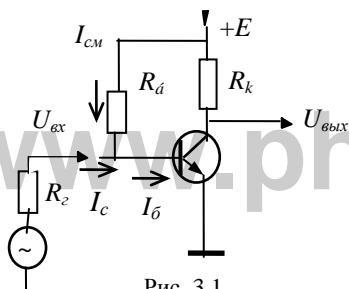


Рис. 3.1

где  $I_0$  – константа, для кремниевых транзисторов  $\approx 10^{-14} (A)$ ;

$$\varphi_T = \frac{KT}{e^-} \quad - \text{ тепловой потенциал } \approx 25 \text{ мв при комнатной}$$

температуре;

$$e^- \text{ – заряд электрона } \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ кул};$$

$$K \text{ – постоянная Больцмана } \approx 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ дж / град};$$

$T$  – абсолютная температура перехода;

$\beta$  – коэффициент передачи (усиления) транзистора по току.  
Входное сопротивление и динамическое сопротивление перехода

(сопротивление в рабочей точке в отсутствие сигнала) определяются как

$$R_\delta = \frac{dU_{\delta\vartheta}}{dI_\vartheta} = \frac{\varphi_T}{I_\vartheta} \text{ [ом]}, \quad R_{ex} = \frac{dU_{\delta\vartheta}}{dI_\delta} = (\beta+1) \frac{\varphi_T}{I_\vartheta} = (\beta+1) R_\delta. \quad [3.1.2]$$

Для малого сигнала, когда  $I_c \ll I_{cm}$ , изменение тока эмиттера

$$\Delta I_\vartheta = \frac{\Delta U_{ex}}{R_\delta}. \quad [3.1.3]$$

Сигнал на выходе можно определить как

$$\Delta U_K = -\Delta I_K R_K \approx -\Delta U_{ex} \frac{R_K}{R_\delta}, \quad [3.1.4]$$

таким образом, коэффициент усиления

$$K_0 = \frac{\Delta U_K}{\Delta U_{ex}} = -\frac{R_K}{R_\delta} = \frac{R_K \beta}{R_e + R_{ex}}. \quad [3.1.5]$$

Здесь имеется в виду, что сопротивление нагрузки включено в  $R_K$ .

В таком простейшем виде усилительный каскад практически не может быть использован в реальных устройствах из-за сильной температурной и сигнальной зависимости  $K_0$ . Для стабилизации коэффициента усиления и других параметров усилителей используется схемотехнический прием, получивший название

«отрицательная обратная связь».

Принцип обратной связи состоит в том, что часть выходного сигнала тем или иным способом вычитается из входного сигнала. В схеме на рис. 3.2 для этой цели используется резистор  $R_\vartheta$ , сигнал на котором связан с сигналом на выходе:

$$\Delta U_\vartheta \approx \frac{R_\vartheta}{R_\vartheta + R_\delta} \Delta U_{ex}. \quad [3.1.6]$$

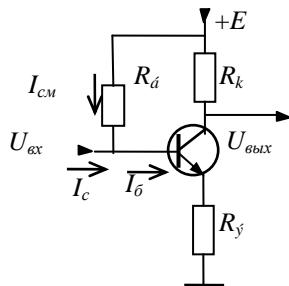


Рис. 3.2

Поскольку изменение тока эмиттера (и, естественно, коллектора) определяется изменением напряжения на переходе база – эмиттер, то на основании [3.1.4] и [3.1.6] можно записать:

$$\Delta U_k = -\Delta I_k R_k \approx -(\Delta U_{ex} - \Delta U_\vartheta) \frac{R_k}{R_\partial} = -\Delta U_{ex} \frac{R_k}{R_\partial} \frac{1}{1 + \frac{R_\vartheta}{R_\partial}}. \quad [3.1.7]$$

Если при этом взять  $\frac{R_\vartheta}{R_\partial} \gg 1$ , то окончательно получим:

$$\Delta U_k = -\Delta U_{ex} \frac{R_k}{R_\vartheta} \quad \text{и} \quad K_{oc} = \frac{\Delta U_k}{\Delta U_{ex}} = -\frac{R_k}{R_\vartheta} \ll K_0, \quad [3.1.8]$$

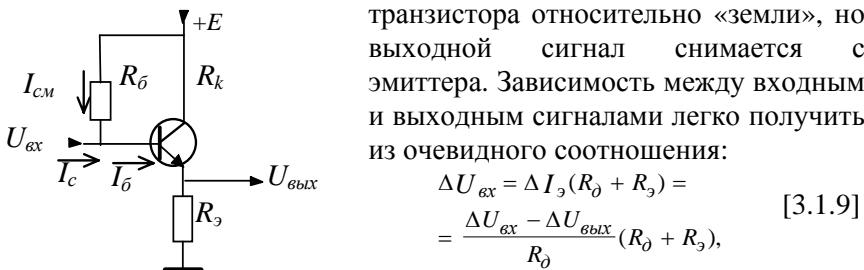
т. е. коэффициент усиления с обратной связью  $K_{oc}$  при сделанных допущениях зависит только от номиналов внешних элементов.

Следует отметить, что при  $R_k = R_\vartheta$ ,  $K_{oc} = 1$ . При этом сигналы на коллекторе и эмиттере имеют одинаковые амплитуды и противоположные полярности. Вместе они образуют паразитный сигнал, используемый для передачи по симметричным линиям связи типа «витая пара».

Примененный в рассмотренном примере тип обратной связи называется отрицательной обратной связью (ООС) по току. Более подробно о типах ООС и её влиянии на параметры усилителей речь пойдет в следующем разделе.

### *Схема с общим коллектором – эмиттерный повторитель*

Схема эмиттерного повторителя приведена на рис. 3.3. Как и в схеме с общим эмиттером, входной сигнал подается на базу транзистора относительно «земли», но выходной сигнал снимается с эмиттера. Зависимость между входным и выходным сигналами легко получить из очевидного соотношения:



$$\begin{aligned} \Delta U_{ex} &= \Delta I_\vartheta (R_\partial + R_\vartheta) = \\ &= \frac{\Delta U_{ex} - \Delta U_{vyix}}{R_\partial} (R_\partial + R_\vartheta), \end{aligned} \quad [3.1.9]$$

Рис. 3.3

откуда

$$K = \frac{\Delta U_{vyix}}{\Delta U_{ex}} = \frac{R_\vartheta}{R_\partial + R_\vartheta} < 1. \quad [3.1.10]$$

Входное и выходное сопротивления эмиттерного повторителя соответственно равны

$$R_{\text{вх}} = (\beta + 1)(R_\delta + R_3) \gg R_{\text{вых}} \approx R_\delta \parallel R_3. \quad [3.1.11]$$

Таким образом, эмиттерный повторитель не дает усиления по напряжению, но дает усиление по мощности. Его основное назначение – согласование источников сигнала, имеющих большое внутреннее сопротивление, с низкоомной нагрузкой.

### Схема с общей базой

Включение транзистора по схеме с общей базой показано на рис. 3.4.

Входной сигнал подается в эмиттер, как правило, через некоторое сопротивление  $R_3$ , а выходной сигнал снимается с  $R_k$ . Имеем:

$$\Delta U_{\text{вых}} = \frac{\Delta U_{\text{вх}}}{R_\delta + R_3} \cdot \frac{\beta}{\beta + 1} \cdot R_k \quad [3.1.12]$$

$$K = \frac{\Delta U_{\text{вых}}}{\Delta U_{\text{вх}}} = \frac{R_k}{R_\delta + R_3} \cdot \frac{\beta}{\beta + 1}. \quad [3.1.13]$$

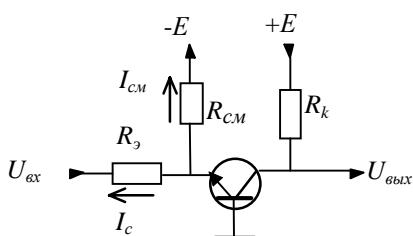


Рис. 3.4

Как следует из [3.1.12], схема с общей базой не дает усиления по току. Усиление по напряжению и, следовательно, по мощности достигается за счет того, что транзистор имеет со стороны входа (эмиттер) низкое, а со стороны выхода (коллектор) – высокое сопротивления.

### Дифференциальный усилительный каскад

Схема дифференциального каскада, или дифференциального усилителя (ДУ), представлена на рис. 3.5. Формально ДУ не отно-

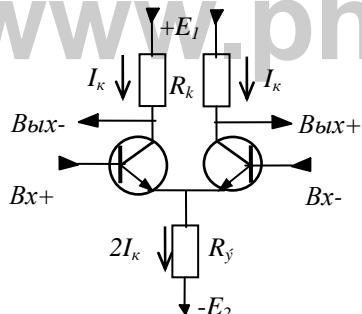


Рис. 3.5

сится к основным схемам включения транзисторов и рассматривается здесь в силу его чрезвычайной популярности.

В общем случае ДУ имеет два входа для подачи сигналов и два выхода. Один из входов (+) называется неинвертирующим, или прямым, а другой (-) – инвертирующим. По отношению к прямому входу выходы также называются прямым (без инверсии

сигнала) и инвертирующим.

Сигнал на прямом выходе зависит от сигналов на входах (при  $R_{uc} \approx 0$ ) следующим образом:

$$\Delta U_{вых+} = \Delta U_{ex+} \cdot \frac{R_k}{2R_\partial}, \text{ при } \Delta U_{ex-} = 0, \quad [3.1.14]$$

$$\Delta U_{вых+} = -\Delta U_{ex-} \cdot \frac{R_k}{2R_\partial}, \text{ при } \Delta U_{ex+} = 0. \quad [3.1.15]$$

Таким образом, сигнал на выходе ДУ определяется разностью сигналов на входах:

$$U_{вых+} = \Delta U_{ex} \frac{R_k}{2R_\partial}, \quad U_{вых-} = -U_{вых+}, \quad [3.1.16]$$

что и отражено в названии.

Дифференциальные каскады широко используются при построении операционных усилителей в интегральном исполнении. Операционные усилители (ОУ) получили такое название потому, что первоначально разрабатывались для построения устройств, выполняющих различные математические операции (суммирование, дифференцирование, интегрирование и т. д.) над аналоговыми сигналами. Тип выполняемой операции обычно задается элементами цепи обратной связи. Сами же ОУ, как правило, имеют высокий коэффициент усиления на нулевой частоте (по постоянному току), высокоомный дифференциальный вход и низкоомный выход.

## 3.2. Основные типы ООС

Тип *ООС* определяется тем, какой параметр сигнала (ток или напряжение) на нагрузке, подключенной к выходу усилителя, и каким способом (параллельно или последовательно) по отношению к источнику входного сигнала используется в качестве сигнала обратной связи.

*ООС, последовательная по напряжению*

(неинвертирующий усилитель)

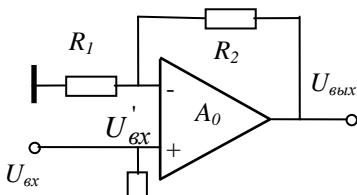


Рис. 3.6

Цепи ООС имеют чисто омический характер.

В этом случае зависимость между сигналами на входе и выходе легко установить из следующих соотношений:

$$U_{\text{вых}}' = U_{\text{вых}} - U_{\text{вых}} \cdot F_{\text{oc}}, \quad \text{где} \quad F_{\text{oc}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad - [3.2.1]$$

фактор обратной связи, характеризующий долю выходного сигнала, возвращаемую на вход.

$$\begin{aligned} U_{\text{вых}} &= A_0 U_{\text{вых}}' = A_0 (U_{\text{вых}} - U_{\text{вых}} \cdot F_{\text{oc}}), \\ U_{\text{вых}} &= U_{\text{вых}} \frac{A_0}{1 + A_0 \cdot F_{\text{oc}}} . \end{aligned} \quad [3.2.2]$$

При условии  $A_0 \gg 1$  получаем:  $U_{\text{вых}} \approx U_{\text{вых}} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$ , откуда коэффициент усиления усилителя с ООС

*OОС, параллельная по напряжению  
(инвертирующий усилитель)*

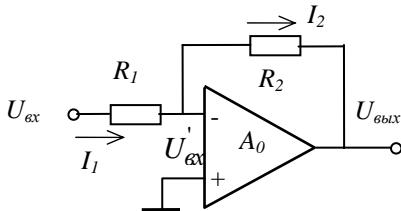


Рис. 3.7

Схема усилителя приведена на рис. 3.7

$$\text{Поскольку } I_1 = \frac{U_{\text{ex}} - U'_{\text{ex}}}{R_1};$$

$$I_2 = \frac{U'_{\text{ex}} - U_{\text{вых}}}{R_2};$$

$$U_{\text{вых}} = -U'_{\text{ex}} \cdot A_0 \quad \text{и} \quad I_1 \approx I_2,$$

то получаем

[www.phys.nsu.ru](http://www.phys.nsu.ru) [3.2.4]

$$U_{\text{вых}} = -U_{\text{ex}} \frac{A_0 R_2}{R_2 + (A_0 + 1) R_1} \approx -U_{\text{ex}} \frac{R_2}{R_1},$$

откуда коэффициент усиления

$$K_0 = -\frac{R_2}{R_1}. \quad [3.2.5]$$

Точка соединения резисторов  $R_1$ ,  $R_2$  и инвертирующего входа ( $-$ ) называется точкой «виртуальной земли», поскольку при сделанных приближениях её потенциал практически не изменяется под воздействием входного сигнала и близок к потенциалу общей шины. Это значит, что сопротивление в этой точке близко к нулю, и она может быть использована для суммирования сигналов от нескольких источников через индивидуальные резисторы, которые будут задавать веса сигналов в сумме.

*Влияние ООС на входное и выходное сопротивления усилителя*

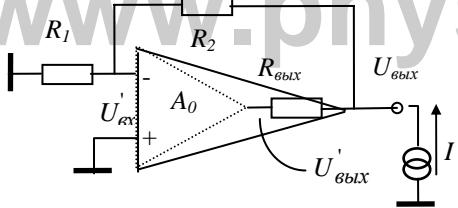


Рис. 3.8

Для определения влияния ООС на выходное сопротивление усилителя подадим на выход усилителя некий ток  $I$  от внешнего генератора тока (рис. 3.8).

Возникающее при этом на выходном электроде напряжение  $U_{\text{вых}}$  равно произведению иско-мого выходного сопротивления  $R_{\text{вых.ос.}}$  на ток  $I$ . Очевидно, что

$$U_{\text{вых}} = U_{\text{вых}} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \text{и}$$

$$\begin{aligned} U_{\text{вых}} &= -U_{\text{вых}} A_0 = -U_{\text{вых}} A_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \text{откуда} \\ IR_{\text{вых}} &\approx U_{\text{вых}} \left( 1 + A_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) \quad \text{и, наконец,} \\ R_{\text{вых.ос.}} &= \frac{U_{\text{вых}}}{I} = R_{\text{вых}} \frac{1}{1 + A_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}} = R_{\text{вых}} \frac{1}{1 + A_0 \frac{1}{1 + K_0}} \approx R_{\text{вых}} \frac{1 + K_0}{A_0}. \end{aligned} \quad [3.2.6]$$

Таким образом, при наличии ООС, задающей коэффициент усиления  $K_0$ , выходное сопротивление усилителя

$$R_{\text{вых.ос.}} \ll R_{\text{вых}}.$$

Аналогичным способом можно определить входное сопротивление  $R_{\text{вх.ос.}}$  при введении ООС. Например, для неинвертирующего усилителя, имеющего собственное входное сопротивление  $R_{\text{вх}}$ ,

$$R_{\text{вх.ос.}} = R_{\text{вх}} \frac{A_0}{K_0}. \quad [3.2.7]$$

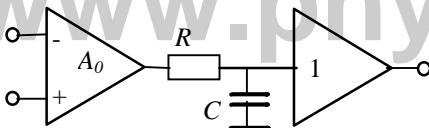


Рис. 3.9

Реальные ОУ имеют частотную зависимость собственного коэффициента

усиления, связанную с ограниченным быстродействием активных элементов и наличием паразитных реактивных элементов (емкости, индуктивности).

Простейшая модель ОУ с уменьшающимся с ростом частоты коэффициентом усиления показана на рис. 3.9. Модель содержит идеальные усилитель и выходной буферный каскад с коэффициентами усиления соответственно  $A_0$  и 1, не зависящими от частоты, и интегрирующей  $RC$  цепочки, определяющей уменьшение усиления с ростом частоты. Коэффициент усиления такого усилителя имеет один полюс при  $\omega = \omega_0$ :

$$A(j\omega) = A_0 \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{A_0}{1 + (\omega/\omega_0)^2} + j \frac{A_0 \omega/\omega_0}{1 + (\omega/\omega_0)^2}, \quad [3.2.8]$$

где первое и второе слагаемые – соответственно действительная и мнимая части коэффициента усиления;  $\omega_0 = RC$  – граничная частота (частота среза) усилителя.

Модуль коэффициента усиления

$$|A(\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = \sqrt{A(j\omega) \cdot A^*(j\omega)} = \frac{A_0}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}. \quad [3.2.9]$$

$$\text{При } \omega \ll \omega_0 \quad |A(\omega)| = A_0;$$

$$\omega = \omega_0 \quad |A(\omega)| = A_0 \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707 A_0; \quad [3.2.10]$$

$$\omega \gg \omega_0 \quad |A(\omega)| \approx A_0 \frac{\omega}{\omega_0}, \quad [3.2.11]$$

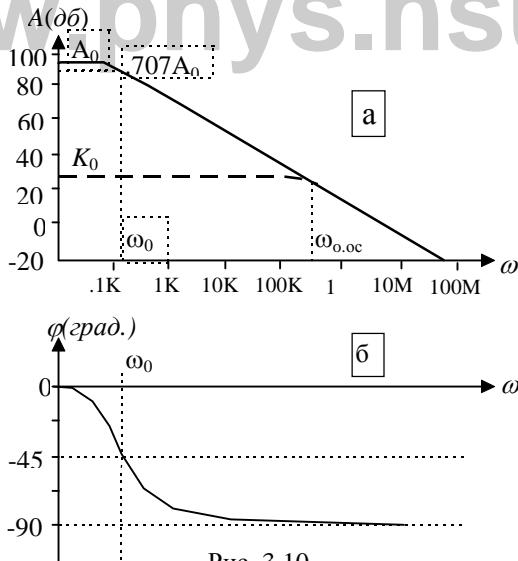


Рис. 3.10

т. е. уменьшается в 10 раз (20 децибелл) на каждую декаду по частоте.

Угол сдвига фазы выходного сигнала относительно входного

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im } A(j\omega)}{\text{Re } A(j\omega)} = \arctg \left( -\frac{\omega}{\omega_0} \right). \quad [3.2.12]$$

Графики  $|A(\omega)|$  и  $\varphi(\omega)$  для типичного ОУ приведены на рис. 3.10, а, б.

При введении ООС, например, в инвертирующем усилителе, коэффициент усиления

$$K(\omega) = -\frac{A(\omega)R_2}{R_2 + [A(\omega) + 1]R_1}. \quad [3.2.13]$$

$$\text{При } \omega \ll \omega_0 \quad K(\omega) = K_0 \approx \frac{R_2}{R_1}.$$

Найдем граничную частоту  $\omega_{0,\text{oc}}$  в этом случае. По определению

$$\frac{K(\omega_{0.oc})}{K_0} = \frac{A(\omega_{0.oc})}{1 - K_0 + A(\omega_{0.oc})} \approx 0,707.$$

Полагая  $A(\omega_{0.oc}) \approx A_0 \frac{\omega_0}{\omega_{0.oc}}$  и учитывая, что  $K_0$  – величина отрицательная, получим:

$$\omega_{0.oc} = \frac{A_0 \omega_0}{1 + |K_0|}. \quad [3.2.14]$$

Таким образом, при  $|K_0| \ll A_0$  имеет место существенное увеличение граничной частоты (пунктирная линия на графике АЧХ (рис. 3.10, а).

#### *Проблема устойчивости усилителя с ООС*

Как было показано выше, максимальный сдвиг фазы сигнала в ОУ с одним полюсом не превышает  $-90^\circ$ . При введении ООС к сдвигу сигнала ООС  $-180^\circ$  добавляются  $90^\circ$ . Полный сдвиг фаз между входным сигналом и сигналом обратной связи в точке приложения ООС составит максимум  $-270^\circ$ . Таким образом, всегда остается запас  $90^\circ$  (до  $360^\circ$ ) и, при отсутствии реактивных элементов в цепи ООС, усилитель всегда устойчив.

Очень часто в многокаскадных ОУ имеется несколько полюсов, в результате чего АЧХ усилителя имеет несколько изломов (рис. 3.11). После каждого из них скорость падения АЧХ увеличивается на  $20 \text{ дб./декаду}$ . Соответственно увеличивается сдвиг фаз. Здесь следует обратить внимание на то, что зависимость сдвига фазы от частоты показана без учета начального сдвига  $-180^\circ$  за счет инверсии.

В таком усилителе чем глубже ООС (соответственно меньше  $K_0$ ), тем больше величина сдвига фаз на граничной частоте  $\omega_{0,\text{ос}}$ .

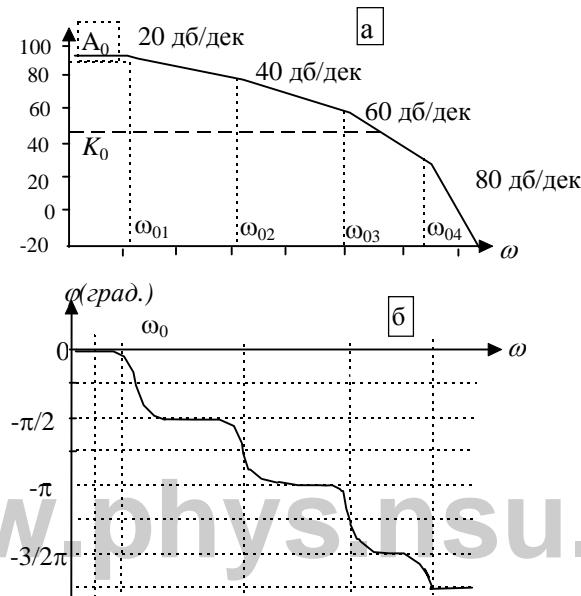
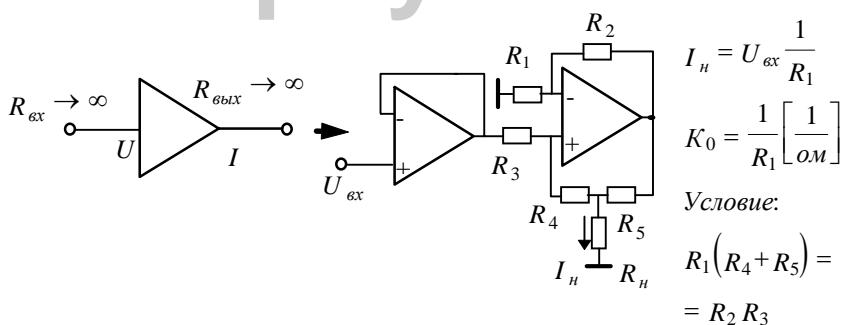


Рис. 3.11

Существует граница по частоте, выше которой отрицательная ОС превращается в положительную, и если на этой частоте  $|A(\omega)|$  все ещё больше 1, то происходит возбуждение – возникают самоподдерживающиеся колебания сигнала на выходе усилителя. Наиболее неустойчив ОУ при  $K_0 = 1$ . В полностью устойчивом (компенсированном) ОУ высшие частоты среза, начиная со второй, приходятся на область частот, где  $|A(\omega)| < 1$ .

#### *Классификация усилителей по входному/выходному сопротивлениям*

Классификация усилителей по входному и выходному сопротивлениям не является исчерпывающей, но вполне соответствует наиболее типичным вариантам (рис. 3.12).



Тип усилителя

Схемная реализация

### 1. Усилитель напряжения

### 2. Преобразователь ток – напряжение

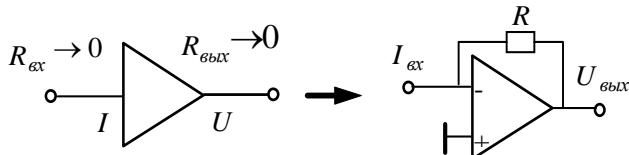
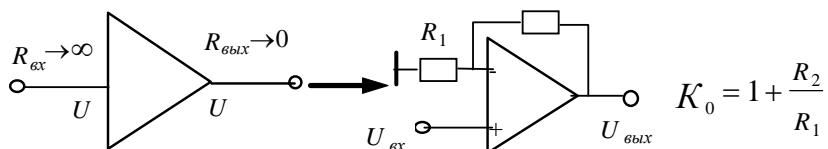


Рис. 3.12

### 3. Преобразователь напряжение – ток

Рис. 3.12

### 3.3. Транзисторные «двойки»

Проблема устойчивости при построении широкополосных усилителей в значительной мере упрощается применением вместо общей ООС, когда имеется одна петля обратной связи с выхода усилителя на вход, так называемой местной ООС, охватывающей отдельные каскады усиления. В этом случае эти каскады могут рассматриваться как функционально законченные усилители с параметрами ( $R_{ex}$ ,  $R_{вых}$ ,  $K_{yc}$ ), определяемыми местными ООС.

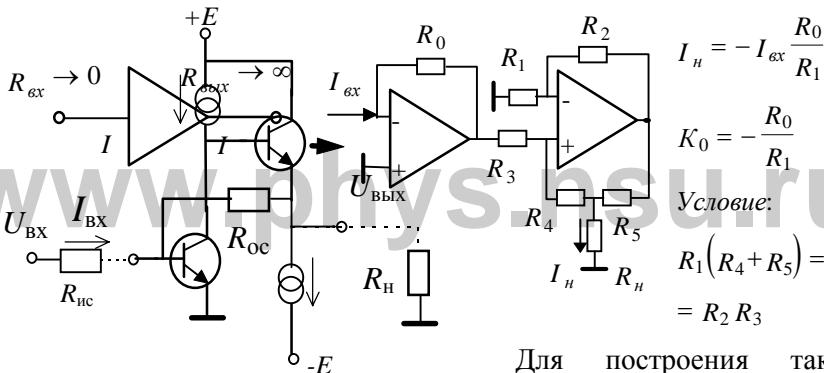


Рис. 3.13

Для построения таких каскадов в большинстве случаев используются

комбинации  $n-p-n$  и  $p-n-p$  транзисторов, получивших название «транзисторных двоек». В импульсных усилителях такие каскады имеют, как правило, разный динамический диапазон для сигналов положительной и отрицательной полярности.

Рассмотрим несколько примеров таких каскадов. В этих примерах для упрощения элементы, задающие начальный режим транзисторов, заменены генераторами тока и напряжения.

#### Пример 1

Схема инвертирующего усилителя (рис. 3.13) на транзисторах  $n-p-n$  типа предназначена для усиления сигналов отрицательной по-

ллярности. Для входных сигналов положительной полярности динамический диапазон сильно ограничен и определяется начальным током выходного транзистора. Для положительных входных сигналов следует использовать *p-n-p* транзисторы с соответствующим изменением полярности питающих напряжений.

К собственно усилителю относятся элементы между точками входа и выхода. Усилитель содержит мини-мум деталей; в качестве элементов смещения, задающих начальный режим транзисторов, чаще всего используются обычные резисторы.

Точные выражения для  $R_{ex}$ ,  $R_{вых}$ ,  $K_u$  получить несложно, но они громоздки. Их упрощенный вид в предположении, что собственный коэффициент усиления транзисторов по току  $\beta_1, \beta_2 \gg 1$ , приведен ниже.

$$K \approx -\frac{K_0 R_{oc} R_\partial \beta_1}{(K_0 R_{uc} R_\partial \beta_1 + R_{uc} R_{oc} + R_{oc} R_\partial \beta_1)}, \quad [3.3.1]$$

где  $K_0 \approx \frac{\beta_2 R_h R_{oc}}{(R_h + R_{oc}) R_\partial}$  – коэффициент усиления усилителя по напряжению при сопротивлении источника сигнала  $R_{uc} = 0$ . Типичное значение коэффициента равно нескольким сотням.

В большинстве практических случаев вторым и третьим слагаемыми в знаменателе [3.3.1] можно пренебречь, тогда

$$K \approx -\frac{R_{oc}}{R_{uc}}. \quad [3.3.2]$$

$$\text{Входное сопротивление } R_{ex} \approx \frac{R_{oc}}{K_0}. \quad [3.3.3]$$

$$\text{Выходное сопротивление } R_{вых} = \frac{R_{uc} + R_{oc}}{1 + \frac{R_{uc}}{R_{oc}} K_0} \approx \frac{R_{oc}}{K_0}. \quad [3.3.4]$$

Типичная величина входного и выходного сопротивлений составляет примерно 1 ом.

*Пример 2*

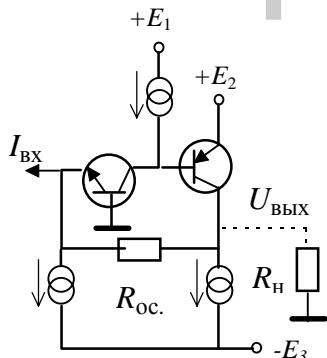


Рис. 3.14

Схема второго инвертирующего усилителя для отрицательных входных сигналов, но на транзисторах разной проводимости, приведена на рис. 3.14. По основным параметрам эта схема схожа с только что рассмотренной. Упрощенные выражения для  $K_{yc}$  и  $R_{ex}$ , совпадают соответственно с [3.3.2] и [3.3.3]. Выходное сопротивление несколько выше, чем в предыдущей схеме:

$$R_{\text{вых}} = \frac{R_{\text{oc}}}{\beta_2}. \quad [3.3.5]$$

Обе приведенные здесь схемы фактически являются преобразователями ток – напряжение и очень часто используются как отдельные устройства предварительного усиления (предусилители) для усиления сигналов от источников с высокоомным (токовым) выходом и последующей передачи их по низкоомным линиям связи типа коаксиальных кабелей и витых пар.

### Пример 3

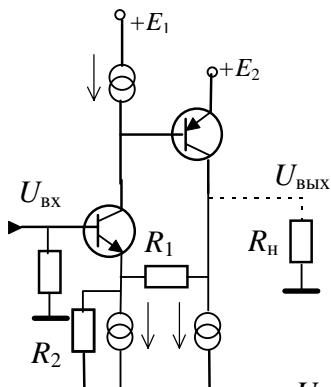


Рис. 3.15

На рис. 3.15 приведена схема неинвертирующей усилительной двойки для входных сигналов положительной полярности. Это типичный усилитель напряжения, поскольку он имеет высокое входное и низкое выходное сопротивления.

$$K = \frac{\beta_2 R_H (R_1 + R_2)}{R_\partial (R_1 + R_2 + R_H) + R_2 R_H \beta_2} \approx \quad [3.3.6]$$

$$\approx 1 + \frac{R_1}{R_2}.$$

$$R_{\text{ex}} = \frac{\beta_1 \beta_2 R_H R_2}{R_1 + R_2 + R_H} \approx \frac{\beta_1 \beta_2 R_H}{K}. \quad [3.3.7]$$

$$R_{\text{вых}} \approx \frac{R_1}{\beta_2}.$$

[3.3.8]

#### Пример 4

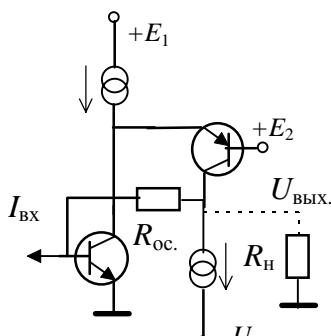


Рис. 3.16

Функционально схема на рис. 3.16 очень схожа со схемой на рис. 3.13, но есть одна особенность, на которую следует обратить внимание.

Второй (выходной) транзистор включен здесь по схеме с общей базой и со стороны коллектора является генератором тока с выходным сопротивлением примерно 10 Мом. Если сопротивления остальных элементов ( $R_{\text{oc}}$ ,  $R_L$  и элемент смещения), подключенных к выходу, имеют

величину такого же порядка, то схема будет иметь очень высокий коэффициент усиления. Это схемное решение используется при построении интегрирующих предусилителей, речь о которых пойдет в следующем разделе.

### 3.4 Зарядочувствительные предусилители

Этот тип предусилителей обычно используется в электронных каналах измерения энергии частиц для предварительного усиления сигналов от источников (детекторов) с большим внутренним сопротивлением. Примером могут служить полупроводниковые детекторы.

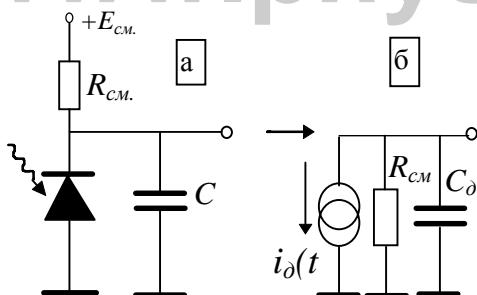


Рис. 3.17

Такой детектор фактически является  $p-n$  переходом (диодом), смещенным в обратном направлении (рис. 3.17, а), и как источник сигнала представляет источник тока с внутренним сопротивлением  $R_{cm}$  и емкостью  $C_d$  (рис. 3.17, б).

В полупроводниковых детекторах в момент поглощения ими энергии квантов или заряженных частиц происходит образование электронно - дырочных пар, количество которых пропорционально поглощенной энергии. Под действием смещающей разности потенциалов, приложенной к детектору, образовавшиеся носители начинают двигаться, в результате чего возникает импульс тока  $i_d(t)$ , площадь которого (заряд) пропорционален поглощенной энергии.

Для преобразования заряда в пропорциональное ему напряжение достаточно проинтегрировать импульс тока. При использовании обычных (без интегрирования) предусилителей в качестве интегрирующей выступает емкость детектора, при этом получается сильная зависимость сигнала от режима работы детектора, температуры, паразитных емкостей и т.п. Для уменьшения этих эффектов вместо пассивного интегрирования используются активные интеграторы, в данном применении получившие название зарядочувствительных усилителей (ЗЧУ).

Основой для построения ЗЧУ является усилитель с большим собственным коэффициентом усиления, охваченный интегрирующей ООС (рис. 3.18).

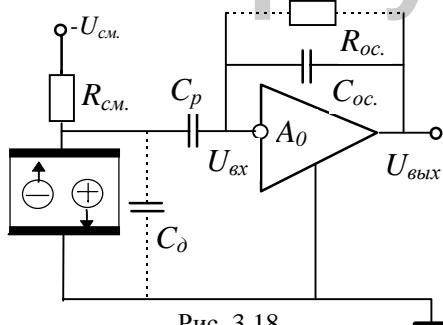


Рис. 3.18

Сигнал на выходе

$$U_{\text{вых}} = -U_{\text{ex}} A = -\frac{A}{C_{\partial} + C_{oc}(1+A)} \int I_{\text{ex}}(t) dt. \quad [3.4.2]$$

$$\text{При } C_{oc}(1+A_0) \gg C_{\partial} \quad U_{\text{вых}} \approx -\frac{Q_{\text{ex}}}{C_{oc}}. \quad [3.4.3]$$

Величина  $C_{oc}(1+A_0) = C_{\text{дин.}}$  называется эффективной динамической емкостью ЗЧУ. На практике всегда стараются выполнить условие  $C_{\text{дин.}} \gg C_{\partial}$ . При большом  $A_0$  это достигается уже при  $C_{oc} \sim 1 - 5 \text{ пФ}$ .

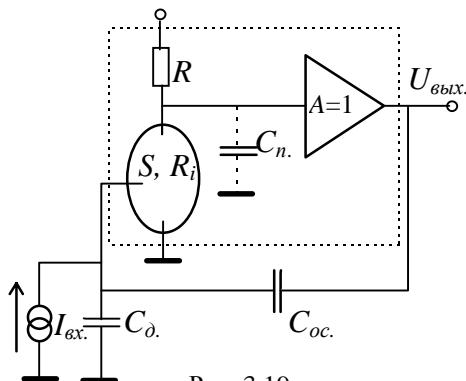


Рис. 3.19

ренним сопротивлением  $R_i$  и буферным выходным каскадом с высоким входным и низким выходным сопротивлениями. Емкость

В результате протекания тока сигнала происходит заряд емкостей  $C_{\partial}$  и  $C_{oc}$  и на входе ЗЧУ появляется сигнал напряжения  $U_{\text{ex}}$ , определяемый входным зарядом:

$$U_{\text{ex}} = \frac{Q_{\text{ex}}}{C_{\partial} + C_{oc}(1+A_0)}. \quad [3.4.1]$$

На параметры ЗЧУ существенно влияет частотная характеристика используемого усилителя. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

На рис. 3.19 внутренняя структура усилителя представлена произвольным усилительным элементом с крутизной вольтамперной характеристики  $S$  и внут-

Складывается из выходной емкости усилительного элемента, входной емкости буферного каскада и емкости элементов монтажа.

При разомкнутой ОС коэффициент усиления по напряжению

$$A(p) = -\frac{A_0}{1 + p \tau_0}, \quad [3.4.4]$$

где  $A_0 = S(R \parallel R_i)$  – коэффициент усиления на нулевой частоте, а  $\tau_0 = (R \parallel R_i)C_n$  – наибольшая постоянная времени в петле ОС, обеспечивающая спад АЧХ 20дб/декаду и гарантирующая устойчивость усилителя.

$$\begin{aligned} U_{вых}(p) &= -I_{ex}(p) \frac{1}{p(C_\partial + C_{oc.})} \cdot \frac{A(p)}{1 + A(p) \frac{C_{oc.}}{C_\partial + C_{oc.}}} = \\ &= -I_{ex}(p) \frac{1}{p \left( C_{oc.} + \frac{C_\partial + C_{oc.}}{A_0} \right)} \frac{1}{1 + p \tau}. \end{aligned} \quad [3.4.5]$$

Второй множитель описывает интегрирование на  $C_{oc.}$ , несколько увеличенное членом  $\frac{C_\partial + C_{oc.}}{A_0}$ . Из-за этого  $U_{вых}$  немножко зависит от  $C_\partial$ .

$$\frac{dU_{вых}}{U_{вых}} = -\frac{dC_\partial}{C_\partial} \frac{1}{A_{рез.}}, \quad [3.4.6]$$

где  $A_{рез.} = A_0 \frac{C_{oc.}}{C_\partial}$  – резервное усиление, определяющее нечувствительность  $U_{вых}$  к изменению  $C_\partial$ .

Третий член описывает интегрирование с постоянной времени

$$\tau = \tau_0 \frac{C_\partial + C_{oc.}}{C_\partial + C_{oc.} + AC_{oc.}} \approx \frac{\tau_0}{A_{рез.}} \approx \frac{C_\partial C_n}{SC_{oc.}}. \quad [3.4.7]$$

Таким образом, резервное усиление при данной крутизне можно увеличивать без снижения быстродействия за счет больших значений  $R, R_i$ , что легко достичь, используя схему, типа приведенной на рис. 3.16

Величина  $\tau$  зависит от рабочих условий системы детектор – предусилитель и не является постоянной, поэтому последующее

формирование выходного сигнала должно это учитывать. Так, если для этого используется дополнительный интегратор, то он должен располагаться за пределами петли ОС и иметь постоянную интегрирования  $\tau_u \gg \tau$ .

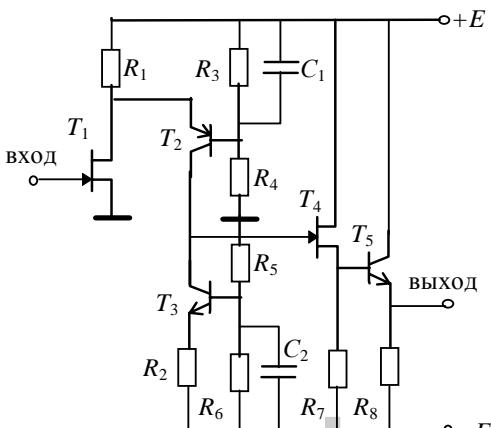


Рис. 3.20

На рис. 3.20 приведена практическая схема, предназначенная для работы в режиме ЗЧУ. Для уменьшения собственных шумов в качестве входного усиительного элемента ( $T_1$ ) используется полевой транзистор с  $p-n$  переходом. Усиление по напряжению происходит в высокоомной точке соединения коллекторов транзисторов  $T_2$ ,  $T_3$  и затвора транзистора  $T_4$  и достигает на нулевой

частоте при крутизне входного транзистора  $S \sim 20$  мА/в. величины порядка  $10^5$ . Включенные друг за другом по схеме повторителей транзисторы  $T_4$  и  $T_5$  обеспечивают низкое выходное сопротивление.

#### 4. Шумы в усилительных каскадах

Среди множества факторов, ограничивающих точность определения параметров сигналов, шумы источников сигналов и электронных трактов обработки сигналов занимают особое место, поскольку они в принципе не могут быть устраниены полностью. К таким шумам относятся тепловой, дробовой шумы и шум  $1/f$ . «Шум», связанный с внешними помехами, не является истинным шумом и может быть понижен путем соответствующего экранирования, по крайней мере, в принципе, до сколь угодно малой величины.

##### 4.1. Тепловой шум

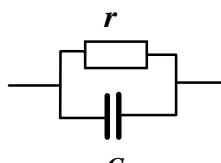
Случайный характер теплового движения свободных электронов в сопротивлении приводит к появлению на его зажимах флуктуаций напряжения, называемых тепловым шумом. Так как полное шумовое напряжение складывается из очень большого числа импульсов, вызванных движением отдельных электронов, то естественно ожидать, что общее шумовое напряжение является гауссовым процессом. В силу того, что длительность отдельных импульсов чрезвычайно мала, спектральную плотность шумового напряжения можно считать однородной (белый шум).

Плотность тепловых шумов комплексного сопротивления описывается формулой Найквиста:

$$\overline{U_n^2} = 4KTZ(\omega) [\Gamma\text{ц}^{-1}], \quad [4.1.1]$$

где  $K = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж  $\cdot$  К $^{-1}$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура.

Например, для параллельной цепи (рис. 4.1) имеем:



$$Z(j\omega) = \frac{r}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} - j \frac{r \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{rC}. \quad [4.1.2]$$

Шумит только активная составляющая

$$R(\omega) = \frac{r}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{комплексного}$$

сопротивления. В соответствии с [4.1.1]:

$$\overline{U_n^2} = 4KT \frac{r}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} d\omega \quad [4.1.3]$$

Шум такой цепи в полосе частот от  $\omega_1$  до  $\omega_2$ :

$$\overline{U_n^2} = 4KT \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} R(\omega) d\omega = \frac{2KT}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{r}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} d\omega = \frac{2KT}{C} \left( \arctg \frac{\omega}{\omega_0} \right) \Big|_{\omega_1}^{\omega_2}. \quad [4.1.4]$$

При  $\omega_1 = 0$  и  $\omega_2 = \infty$ , т. е. в бесконечной полосе частот

$$\overline{U_n^2} = \frac{KT}{C}. \quad [4.1.5]$$

Эквивалентная схема шумящего сопротивления показана на рис. 4.2

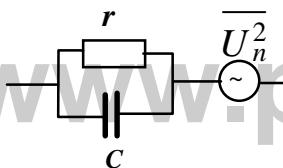


Рис. 4.2

Часто бывает удобнее представлять шумовые параметры цепи не в виде генератора напряжения, а в виде генератора тока (рис. 4.3). По теореме об эквивалентном генераторе

$$\overline{I_n^2} = \frac{\overline{U_n^2}}{|Z(\omega)|^2} = \frac{4KT}{r} [\Gamma \psi^{-1}], \quad [4.1.6]$$

т. е. шумит только активная составляющая проводимости, причем, она не зависит от частоты

$$G(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)} = \frac{1}{r} + j \frac{1}{r} \frac{\omega}{\omega_0}. \quad [4.1.7]$$

Обе эквивалентные схемы совершенно равнозначны. Вычисление  $\overline{U_n^2} = \overline{I_n^2} \cdot |Z(\omega)|^2$  в схеме на рис. 4.3, естественно, приводит к [4.1.3].

#### 4.2. Дробовой шум

Этот вид шума связан с направленным перемещением носителей заряда, иными словами, с током. Дробовой шум – специфический и наиболее важный вид внутренних шумов в электронных приборах.

В электровакуумных приборах он возникает на поверхности катода вследствие статистического характера эмиссии электронов и дискретности их заряда. Аналогичные шумы наблюдаются и в полупроводниковых приборах, и связаны они с процессами генерации и рекомбинации носителей заряда.

Для тока со средним значением  $I_0$ , протекающего в какой-то цепи, дисперсия

$$\overline{I_n^2} = 2e^- I_0 [\text{Гц}^1], \text{ где } e^- = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} - \text{заряд электрона. [4.2.1]}$$

Спектральная плотность дробового шума, как и теплового, однородна.

### 4.3. Шум $1/f$

Низкочастотный шум (фликкер-шум, или шум  $1/f$ ) – это сравнительно медленные флуктуации тока и напряжения. Предполагается, что  $1/f$ -шум связан с процессами генерации и рекомбинации носителей заряда в приповерхностных и приконтактных областях полупроводников или в оксидном слое на их поверхности, возникающими на медленных центрах рекомбинации.

Зависимость  $\sim 1/f$  спектральной плотности такого типа шумов имеет место от частот  $\approx 10^3$  Гц и вплоть до самых низких. В биполярных транзисторах и полевых транзисторах с  $p-n$  переходом в не слишком низкочастотной области шумы  $1/f$  малы по сравнению с другими видами шумов. В полевых транзисторах с МДП структурой шум  $1/f$  может составлять существенную долю в общем уровне шумов.

### 4.4. Приведение шумов ко входу. Эквивалентное шумовое сопротивление

Усилительные приборы – полевой или биполярный транзисторы, электронная лампа и т. д. также являются источниками шума. Так, в полевых транзисторах шум создается токами затвора и канала.

Шумы, возникающие в разных частях системы детектор (источник сигнала) – предусилитель, для простоты сравнения с полезным входным сигналом удобно представлять в виде эквивалентных генераторов шума, действующих на входе

предусилителя. При этом некоторые из этих генераторов оказываются включенными параллельно, а другие – последовательно со входом. Соответственно, различные источники шумов и сами шумы подразделяются на параллельные и последовательные. Разделение шумов на параллельные и последовательные носит принципиальный характер, что, в частности, проявляется в том, что они совершенно по разному преобразуются в противошумовых фильтрах.

Рассмотрим усилительный каскад на основе произвольного трехэлектродного активного элемента (рис. 4.4, а).

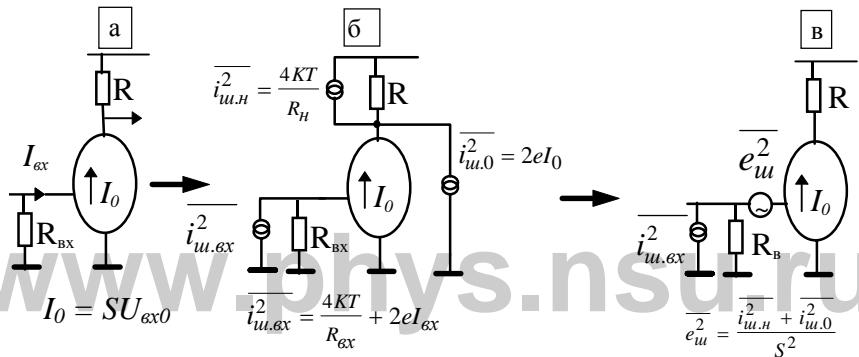


Рис. 4.4

Входной ток  $I_{ex}$  представляет ток входного электрода (база, затвор или сетка), ток  $I_0$  – начальный ток, обеспечивающий работу прибора в активном режиме, сопротивление  $R_{ex}$  является эквивалентным сопротивлением цепи, задающим рабочую точку по входу.

На рисунке 4.4, б показан тот же каскад с эквивалентными генераторами шумов. И, наконец, пересчитав через крутизну ко входу внутренние шумы  $\overline{i_{uu,H}^2}$  и  $\overline{i_{uu,0}^2}$ , получим эквивалентную шумовую схему каскада (рис. 4.4, в). Как видно из этого рисунка, имеется эквивалентный источник шума  $\overline{i_{uu,ex}^2}$ , включенный параллельно входу (и источнику сигнала) и представляющий так

называемые «параллельные» шумы, и источник шума  $\overline{e_u^2}$ , включенный последовательно с сигналом и представляющий «последовательные» шумы.

Оба вида шумов состоят из нескольких слагаемых, которые могут иметь существенно различную величину. Например, собственный шум сопротивления  $R_u$  и дробовой шум тока режима транзистора становятся равными при

$$R_u I_0 = \frac{2KT}{e} = 50\text{мв}. \quad [4.4.1]$$

Это так называемое правило «пятидесяти милливольт», которое гласит, что при токе, создающем на сопротивлении падение напряжения  $>50\text{мв}$ , тепловым шумом сопротивления по сравнению с дробовым шумом тока можно пренебречь.

Для получения максимального отношения сигнал/шум частотная зависимость коэффициента усиления  $A(j\omega)$  усилителя должна быть оптимизирована в соответствии со спектральным составом сигнала и шума.

#### 4.5. Эквивалентный шумовой заряд

Рассмотрим систему детектор – усилитель (рис. 4.5).

Здесь  $\overline{I_p^2}$  – параллельные шумы, обусловленные током утечки детектора, входным током усилителя (сеточный, базовый ток, ток затвора), тепловым шумом сопротивления смещения  $R_b$ .

Последовательные шумы  $\overline{U_s^2}$  вызваны статистическими флуктуациями токов элементов (дробовой шум анодного, коллекторного токов, тока канала) и зависящим от частоты

фликкер-шумом. Обозначим  $\overline{I_p^2} = a$ ;  $\overline{U_s^2} = b + \frac{A_f}{f}$ , где  $a$  и  $b$  –

постоянные, описывающие белый шум и зависящие от конкретных условий. Очевидно, что

$$\overline{U_{ш.вых}^2} = \overline{U_{ш.вх}^2} \cdot A^2(j\omega) \left[ \Gamma \zeta^{-1} \right], \quad [4.5.1]$$

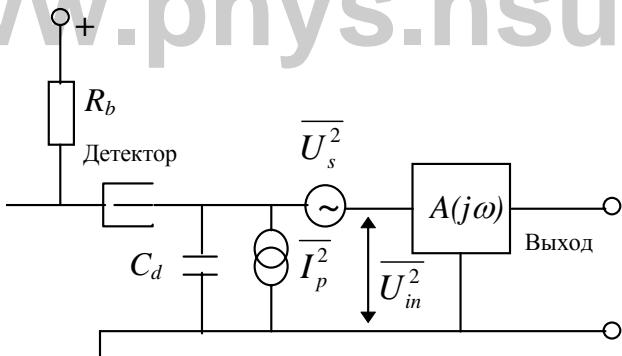


Рис. 4.5

откуда

$$\overline{U_{ш.вых}^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left( \overline{U_s^2} + \frac{1}{\omega^2 C^2} \overline{I_p^2} \right) \cdot |A(j\omega)|^2 d\omega. \quad [4.5.2]$$

Пусть усилитель  $A(j\omega)$  содержит одну дифференцирующую и одну интегрирующую цепочки (рис. 4.6). Положим для простоты

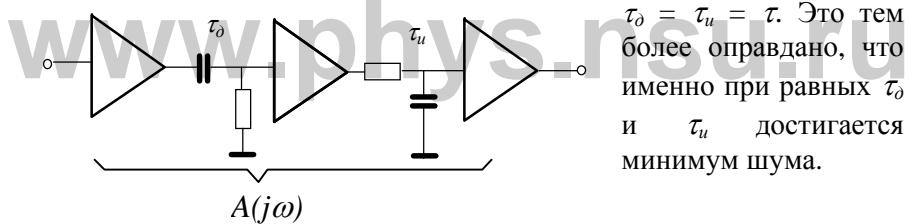


Рис. 4.6

Тогда

$$|A(j\omega)|^2 = \frac{(\omega\tau)^2}{(1 + \omega^2\tau^2)^2}.$$

Введя обозначение  $(\omega\tau)^2 = x$ , получим

$$\overline{U_{ш.вых}^2} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{b}{\tau} \int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{a}{C^2} \tau \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2} dx + A_f \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2} dx \right) \quad [4.5.3]$$

Эти интегралы берутся подстановкой  $x = \operatorname{tg} u$ . Первые два интеграла равны  $\pi/4$ , а третий  $1/2$ . В результате получаем

$$\overline{U_{\text{ш.вых}}^2} = \frac{a}{8} \cdot \frac{\tau}{C^2} + \frac{b}{8\tau} + \frac{A_f}{2}. \quad [4.5.4]$$

Из последней формулы следует, что вклад параллельных шумов в общий уровень на выходе находится в прямой, а последовательных – в обратной зависимости от постоянной времени  $\tau$  усилителя. Вклад фликкер - шума для данного вида  $A(j\omega)$  вообще не зависит от этой постоянной времени.

Из [4.5.4] также следует, что оптимальное значение  $\tau$ , соответствующее минимуму шума

$$\tau_{\text{опт.}} = C \sqrt{\frac{b}{a}}, \quad [4.5.5]$$

что соответствует равному вкладу параллельных и последовательных шумов.

Отметим в связи с этим одно очень важное обстоятельство, состоящее в том, что изначально равномерное («белое») распределение плотности мощности последовательных и параллельных шумов (без учета фликкер - шума) благодаря интегрированию на емкости  $C$  превращается в распределение вида

$$b + \frac{a}{\omega^2 C^2}. \quad [4.5.6]$$

Дифференцирующая цепь с постоянной времени  $\tau_{\text{опт.}}$  имеет функцию передачи

$$Z(j\omega) = Z_0 \frac{j\omega \tau_{\text{опт.}}}{1 + j\omega \tau_{\text{опт.}}}, \quad [4.5.7]$$

и, соответственно, квадрат модуля функции передачи

$$|Z(j\omega)|^2 = Z_0^2 \frac{(\omega \tau_{\text{опт.}})^2}{1 + (\omega \tau_{\text{опт.}})^2}. \quad [4.5.8]$$

Пройдя через такую цепь шум вида [4.5.6] вновь превращается в белый.

Поскольку практическое значение имеет не абсолютный уровень шумов, а отношение сигнал/шум, то часто для характеристики шумовых свойств усилителя используется так называемый

эквивалентный шумовой заряд  $Q_{ш.экв.}$ , определяемый как заряд, который будучи поданным на вход усилителя в виде очень короткого импульса тока, дает на выходе сигнал, амплитуда которого равна  $\sqrt{U_{ш.вых}^2}$ .

Для указанного входного сигнала и рассматриваемого вида  $A(j\omega)$  сигнал на выходе

$$U = \frac{Q_{ш.экв.}}{C} \cdot \frac{t}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad [4.5.9]$$

Амплитуда такого сигнала  $U_{\max} = \frac{Q_{ш.экв.}}{C} \cdot \frac{1}{e}$ . При условии

$\overline{U_{ш.вых}^2} = U_{\max}^2$  и, считая  $e^2 \approx 8$ , получим:

$$Q_{ш.экв.} = \frac{1}{e^-} \sqrt{a\tau + \frac{b}{\tau} C^2 + 4A_f C^2} \text{ [электронов]}, \quad [4.5.10]$$

где  $e^-$  – заряд электрона, поэтому  $Q_{ш.экв.}$  выражен в числе электронов.

Легко показать, что в случае использования зарядочувствительного усилителя между детектором и основным усилителем с коэффициентом передачи  $A(j\omega)$ , эквивалентный шумовой заряд

$$Q_{ш.экв.} = \frac{1}{e^-} \sqrt{a\tau + \frac{b}{\tau} (C + C_{oc})^2 + 4A_f (C + C_{oc})^2}. \quad [4.5.11]$$

## 5. Фильтрация шумов

Основной целью фильтрации шумов в общем случае является получение максимального отношения сигнал/шум. Практически же в каждом конкретном случае приходится учитывать ряд дополнительных требований: загрузочную способность спектрометрического тракта, чувствительность к флуктуациям длительности сигналов с детектора, пригодность формы выходного сигнала фильтра для преобразования аналог – цифра и ряд других. Эти дополнительные требования часто вступают в противоречие с условиями получения наилучшего отношения сигнал/шум.

Различные типы реально используемых противошумовых фильтров, например, рассмотренный ранее RC-CR фильтр, в разной мере удовлетворяют перечисленным выше критериям.

### 5.1. Оптимальная фильтрация

Определим критерии, по которым должен строиться оптимальный фильтр, позволяющий получить наибольшее отношение сигнал/шум при прочих равных условиях. Пусть на входе искомого фильтра действует экспоненциальный сигнал с выхода зарядочувствительного усилителя вместе с наложенным на него шумом, имеющим равномерное (белое) распределение со средним значением  $(\overline{u_{uu}^2})^{1/2}$ .

При известных параметрах ( $\tau$ ) значение экспоненты в любой точке временной шкалы несет информацию об её амплитуде. Отношение сигнал/шум при определении амплитуды будет равно этому отношению в точке измерения. Очевидно, что максимальное отношение сигнал/шум можно получить, если использовать всю информацию, содержащуюся в исходном сигнале.

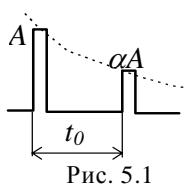


Рис. 5.1

Для простоты рассмотрения возьмем на экспоненте две выборки – в точке максимума и на расстоянии  $t_0$  от него. Получим два импульса с амплитудами  $A$  и  $\alpha A$ , где  $\alpha = \exp(-t_0/\tau)$  (рис. 5.1). Если амплитуду экспоненты определять по первой выборке, то отношение сигнал/шум  $= A / (\overline{u_{uu}^2})^{1/2}$ , если по второй, то  $\alpha A / (\overline{u_{uu}^2})^{1/2}$ . В обоих

случаях отношение сигнал/шум не максимально, поскольку используется только часть информации. Полностью использовать эту информацию позволяет оптимальный аналоговый процессор, вырабатывающий взвешенную сумму двух сигналов. На рис. 5.2 приведена блок-схема такого оптимального процессора.

Сигнал с амплитудой  $A(1 + \alpha\alpha')$  на выходе сумматора возникает в результате сложения сигнала с амплитудой  $A$  после задержки и сигнала с амплитудой  $\alpha'\alpha A$  после масштабирующего устройства с коэффициентом передачи (весом)  $\alpha'$ . Поскольку шумы складываются квадратично, то это отношение имеет максимум при  $\alpha' = \alpha$ .

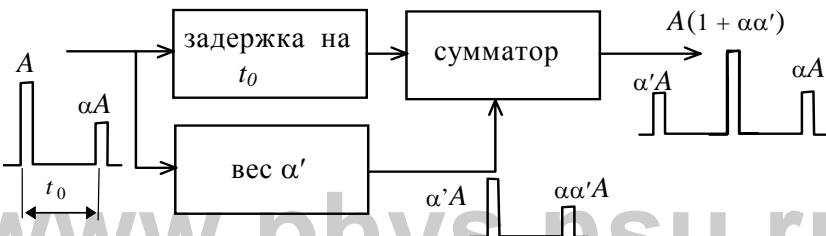


Рис. 5.2

$$c/u = \frac{A(1+\alpha\alpha')}{(1+\alpha'^2)^{1/2}(\overline{U_{\text{ш.}}^2})^{1/2}}. \quad [5.1.1]$$

Это отношение имеет максимум при  $\alpha' = \alpha$ .

Таким образом,

$$(c/u)_{\max} = \frac{A(1+\alpha^2)^{1/2}}{(\overline{U_{\text{ш.}}^2})^{1/2}}. \quad [5.1.2]$$

Если сигнал представлен большим числом импульсов (рис. 5.3, а), то

$$(c/u)_{\max} = \frac{A(1+\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots)^{1/2}}{(\overline{U_{\text{ш.}}^2})^{1/2}}. \quad [5.1.3]$$

Вид сигнала на выходе оптимального фильтра (вопрос реализуемости пока оставим в стороне) показан на рис. 5.3, б. Видно, что величина сигнала на выходе оптимального фильтра в

[www.phys.nsu.ru](http://www.phys.nsu.ru)  
произвольный момент времени  $t_0$  определяется только частью входного сигнала от этого момента до  $\infty$ .

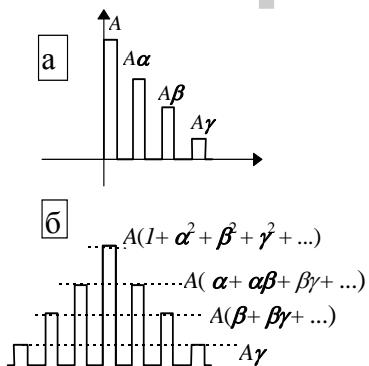


Рис. 5.3

Для экспоненциального входного сигнала  $v_1(t)$  как, например, с выхода зарядочувствительного усилителя, импульсная характеристика (реакция на единичный импульс) оптимального фильтра должна иметь вид (рис. 5.4, б):

$$h(t) = e^{(t - t_0)/\tau}, \quad t < t_0. \quad [5.1.4]$$

Сигнал  $v_2(t)$  на выходе фильтра в любой момент времени  $t_0$

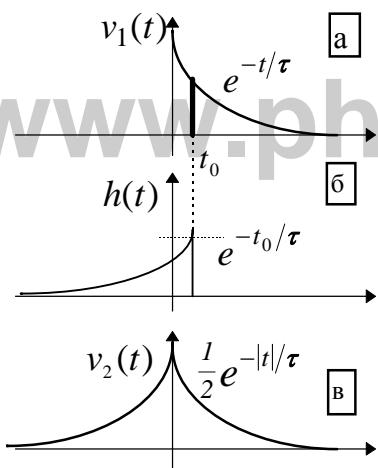


Рис. 5.4

$$v_2(t_0) = \frac{1}{\tau} e^{t_0/\tau} \int_{t_0}^{\infty} e^{-2t/\tau} dt = \frac{1}{2} e^{-t_0/\tau}$$

для  $t_0 \geq 0$  и

$$v_2(t_0) = \frac{1}{\tau} e^{t_0/\tau} \int_0^{\infty} e^{-2t/\tau} dt = \frac{1}{2} e^{t_0/\tau}$$

для  $t_0 \leq 0$ , или в общем виде

$$v_2(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|/\tau}. \quad [5.1.5]$$

Сигнал такой формы (рис. 5.4, б) называется сигналом CUSP-формы. Временное положение входного и выходного сигналов, показанное на рис. 5.4, а, в на практике не реализуемо, т. к. выходной сигнал начинается раньше входного. Поэтому в реальных схемах выходной сигнал задерживается на время, много большее  $\tau$ .

## 5.2. Сравнительный анализ фильтров методом шумовых индексов

Основными критериями при выборе параметров фильтров являются:

- отношение сигнал/шум;
- загрузочная способность;
- чувствительность к длительности сигналов с детектора.

Ни один фильтр не является оптимальным со всех точек зрения. Поэтому в каждом конкретном случае оптимизация проводится по наиболее важному в данном приложении параметру.

Рассмотрим некий приём, позволяющий быстро, без громоздких вычислений, проводить сравнение основных параметров фильтров и оценивать их пригодность для конкретного применения. Будем считать, что сигнал (вместе с шумом) поступает на вход фильтра (рис. 5.5) с выхода ЗЧУ, а шум на входе ЗЧУ состоит из коротких

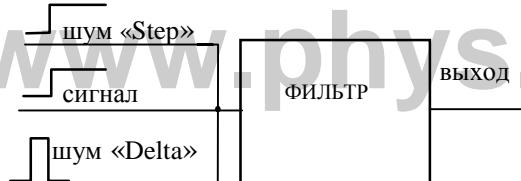


Рис. 5.5

импульсов, несущих одинаковое количество заряда.

Различие между параллельными и последовательными шумами после их прохождения через ЗЧУ проявляется в

том, что параллельные шумы интегрируются и на выходе фильтра имеют вид ступенек (STEP), а последовательные – не интегрируются и имеют вид коротких (DELTA) импульсов. Причем ступеньки имеют одинаковую амплитуду, а  $\Delta$ -импульсы – одинаковую площадь. Распределение их по времени случайно со средними частотами  $n_s$  [ $\text{имп.}/\text{сек}$ ] и  $n_\Delta$  [ $\text{имп.}/\text{сек}$ ].

Для фильтров, параметры которых не зависят от наличия сигнала (время – инвариантные фильтры),  $S$ -шум не отличим от сигнала и обрабатывается точно также.

Фильтр преобразует сигнал (и шум) в импульсы конечной длительности. Амплитуда сигнала измеряется в некоторый момент времени  $T_m$ . Точность измерения будет зависеть от суммарного эффекта от всех шумовых сигналов, пришедших на вход фильтра за время от  $-\infty$  до  $T_m$ .

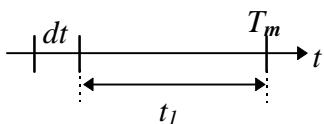


Рис. 5.6

Введем остаточную функцию  $S$ -шума  $R(t)$ , которая представляет остаточный эффект в момент

времени  $T_m$  от ступеньки единичной амплитуды, пришедшей за время  $t$  до  $T_m$ . Каждый  $S$ -сигнал, появившийся в интервале от  $t_1 + dt$  до  $T_m$  вызывает в момент  $T_m$  отклик  $R(t_1)$  (рис. 5.6).

Среднее число импульсов  $S$ -шума за время  $dt$   $\bar{N} = n_s dt$ .

Флуктуация этого числа (дисперсия)  $D_{\bar{N}} = \bar{N}$ . Соответственно, флуктуация отклика

$$D_{\bar{N}} \cdot |R(t_1)|^2 = n_s |R(t_1)|^2 dt. \quad [5.2.1]$$

Суммарный эффект от всех шумовых сигналов, пришедших на вход фильтра за время от  $-\infty$  до  $T_m$  составляет примерно  $n_s \int_0^{\infty} |R(t_1)|^2 dt$ . Определим индекс  $S$ -шума как

$$\bar{N}_s^2 = \frac{n_s}{A_c^2} \int_0^{\infty} |R(t)|^2 dt, \quad [5.2.2]$$

где  $A_c$  – нормировочный коэффициент, характеризующий реакцию фильтра на полезный сигнал и равный амплитуде выходного сигнала фильтра при подаче на вход ступеньки единичной амплитуды.

Каждый шумовой  $\Delta$ -импульс может быть представлен двумя сдвинутыми на  $\Delta t$  разнополярными ступеньками амплитудой  $\frac{1}{\Delta t}$ .

Их влияние на амплитуду сигнала в момент времени  $T_m$  будет примерно равно  $\frac{1}{\Delta t} [R(t) - R(t - \Delta t)]$ . При  $\Delta t \rightarrow 0$  мы получим остаточную функцию  $\Delta$ -шума, равную  $R'(t)$ . Соответствующий индекс  $\Delta$ -шума

[www.phys.nsu.ru](http://www.phys.nsu.ru) [5.2.3]

$$\overline{N_{\Delta}^2} = \frac{n_{\Delta}}{A_c^2} \int_0^{\infty} |R'(t)|^2 dt.$$

Поясним использование шумовых индексов на примерах.

### RC–CR фильтр

Отклик RC–CR фильтра, имеющего одну дифференцирующую и одну интегрирующую цепь, на единичную ступеньку на входе (переходная функция) имеет вид  $\sim t/\tau e^{(1-t/\tau)}$ . При такой записи максимум отклика равен 1, так что  $A_c = 1$ .

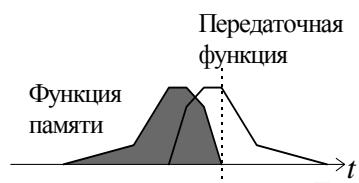


Рис. 5.7

Функция памяти любого времени – инвариантного фильтра совпадает с его переходной функцией, если время отсчитывать от  $T_m$  назад в прошлое (рис. 5.7),

$$R(t) = t/\tau e^{-(1-t/\tau)}. \quad [5.2.4]$$

$$R'(t) = \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} \left( e^{-t/\tau} - \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau} \right). \quad [5.2.5]$$

Функция  $R(t)$  описывает реакцию фильтра на ступеньку напряжения и, поэтому, безразмерна; функция  $R'(t)$  имеет размерность  $\left[ \frac{1}{сек} \right]$ , т. к. описывает реакцию фильтра на импульсы напряжения единичной площади, имеющие размерность  $[в\cdot сек]$ .

$$\overline{N_s^2} = n_s \int_0^{\infty} \left( \frac{t}{\tau} \right)^2 e^{2(1-t/\tau)} dt \approx n_s 1,847 \tau, \quad [5.2.6]$$

$$\overline{N_{\Delta}^2} = n_{\Delta} \frac{e^2}{\tau^2} \int_0^{\infty} e^{-2t/\tau} \left( 1 + \frac{t^2}{\tau^2} - 2 \frac{t}{\tau} \right) dt \approx n_{\Delta} \frac{1,847}{\tau}. \quad [5.2.7]$$

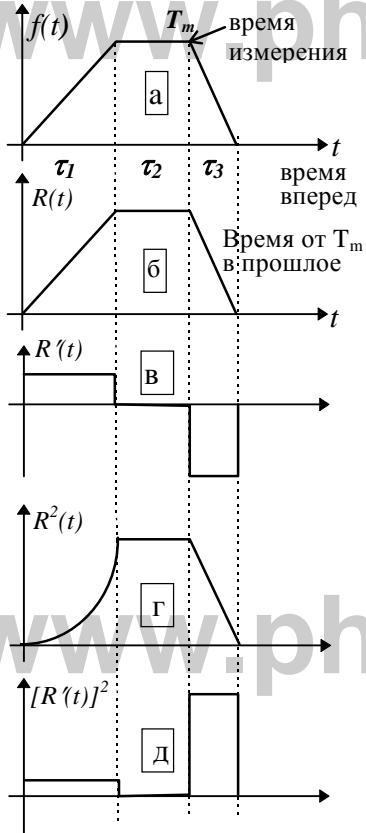


Рис. 5.8

Минимум суммарного шумового индекса  $\overline{N_s^2} = \overline{N_s^2} + \overline{N_\Delta^2}$ , очевидно, достигается при значении  $\tau_{opt} \sim \sqrt{\frac{n_\Delta}{n_s}}$ , при котором вклад параллельных и последовательных шумов одинаков.

Отметим, что прямая для  $\overline{N_s^2}$  и обратная для  $\overline{N_\Delta^2}$  зависимости от  $\tau$  находятся в полном соответствии с ранее полученной точной формулой [4.5.11] для эквивалентного шумового заряда для RC-CR фильтра.

#### *Время – инвариантный трапециoidalный фильтр*

Переходная функция фильтра показана на рис. 5.8, а. Площадь под  $[R(t)]^2$  (рис. 5.8, г) определяет индекс S-шума  $\overline{N_s^2}$ . Этот вид шума пропорционален длительности отклика фильтра.

Площадь под  $[R'(t)]^2$  (рис. 5.8, д),

определенная индексом  $\Delta$ -шума, зависит главным образом от той части отклика, где имеется наибольшая скорость изменения, плоская же часть  $f(t)$  вообще не дает вклада в  $\Delta$ -шум. Чем больше плоская часть  $f(t)$ , тем меньше влияние длительности сигнала на входе ЗЧУ на амплитуду сигнала на выходе фильтра.

Итак,

$$\overline{N_s^2} = \int_0^{\tau_1} \left( \frac{t}{\tau_1} \right)^2 dt + \int_0^{\tau_2} (1)^2 dt + \int_0^{\tau_3} \left( \frac{t}{\tau_3} \right)^2 dt = \tau_2 + \frac{\tau_1 + \tau_3}{3}, \quad [5.2.8]$$

$$\overline{N_A^2} = \int_0^{\tau_1} \left( \frac{1}{\tau_1} \right)^2 dt + \int_0^{\tau_3} \left( \frac{1}{\tau_3} \right)^2 dt = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_3}. \quad [5.2.9]$$

Можно показать, что при заданной длительности сигнала на выходе фильтра наибольшее отношение сигнал/шум достигается при симметричной форме сигнала (рис. 5.9). В этом случае

$$\overline{N_s^2} = \frac{1}{3} (2T_f + T_s) \quad \text{и} \quad \overline{N_\Delta^2} = \frac{4}{(T_s - T_f)}. \quad [5.2.10]$$

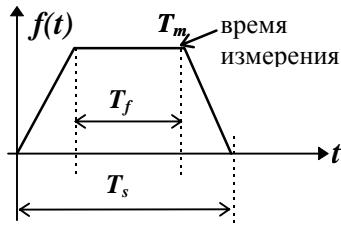


Рис. 5.9

Сравним полученные результаты для RC-CR и трапецидального фильтров. Положим  $T_s = 2\tau$  и  $T_f = 0$ , тогда выходные сигналы обоих фильтров станут похожими и будут достигать максимума в одно и то же время  $t = \tau$ . Трапецидальный фильтр при этом превращается в треугольный (по форме выходного сигнала).

$$\text{Треугольный фильтр } \overline{N_s^2} = 0,667\tau, \quad \overline{N_\Delta^2} = 2/\tau. \quad [5.2.10]$$

$$\text{RC-CR фильтр } \overline{N_s^2} = 1,847\tau; \quad \overline{N_\Delta^2} = 1,847/\tau. \quad [5.2.11]$$

Видно, что при указанных выше условиях треугольный фильтр гораздо эффективнее, чем RC-CR фильтр, подавляет параллельные S-шумы и только на 8 % хуже в отношении последовательных Δ-шумов. При оптимальном выборе параметра  $t$  для каждого фильтра, когда доли параллельных и последовательных шумов на выходе сравниваются, преимущество треугольного фильтра в отношении сигнал/шум составляет 26 %.

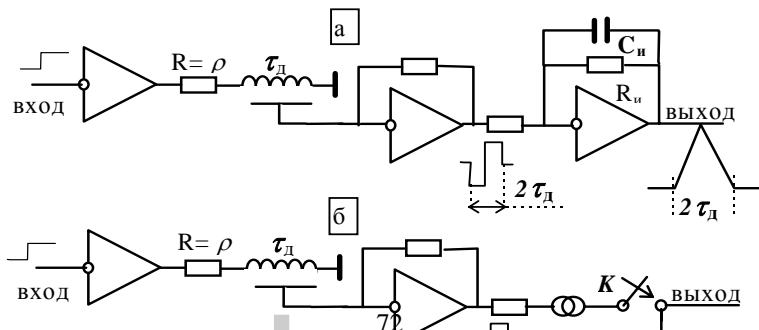


Рис. 5.10

Следует подчеркнуть, что полученный результат справедлив только для времея – инвариантного треугольного фильтра, у которого вид функции памяти совпадает с переходной функцией.

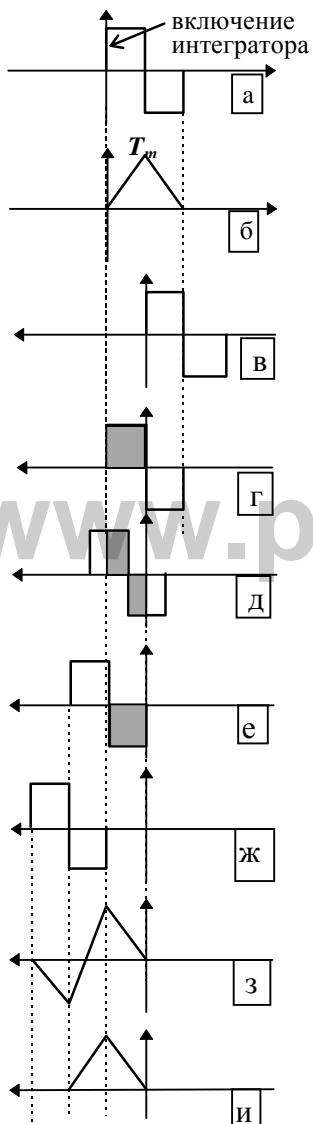


Рис. 5.11

Треугольный фильтр можно реализовать, используя двойное дифференцирование на линии задержки с последующим интегрированием.

Во времея – инвариантном фильтре (рис. 5.10, а) интегрирование осуществляется интегратором, постоянно подключенным к выходу дифференциатора.

#### *Время – варианнтный треугольный фильтр*

Во времея – варианнтном фильтре (Рис. 5.10, б) используется управляемый интегратор, состоящий из ключа  $K$  и интегрирующей емкости  $C_i$ . Ключ замыкается только на время существования сигнала на выходе дифференциатора.

Для определения функции памяти времея – варианнтного треугольного фильтра рассмотрим графики на рис. 5.11. На рис. 5.11, а, б изображен полезный сигнал на выходах дифференциатора и интегратора. На рис. 5.11, в, г, д, е, ж показаны несколько шумовых импульсов, пришедших в различные моменты времени относительно времени измерения  $T_m$ . Заштрихованы те части импульсов, которые будут проинтегрированы на  $C_i$ .

На рис. 5.11, з, и показан вид функций памяти соответственно времея – варианнтного и времея – инвариантного треу-

гольных фильтров. Видно, что общая длительность функции памяти в первом случае несколько больше, чем во втором. К тому же, функция памяти времени – вариантного фильтра имеет участок с крутизной в два раза большей, чем у времени – инвариантного фильтра. Следовательно, можно ожидать, что шумовые свойства времени – вариантного фильтра будут хуже как для параллельных, так и для последовательных шумов.

Действительно, простые расчеты дают для этого фильтра значения

$$\overline{N_s^2} = \tau \text{ и } \overline{N_\Delta^2} = 6/\tau.$$

При оптимальном значении  $\tau$  для каждого фильтра и одном и том же источнике сигналов (и шумов) время – вариантный фильтр имеет

более высокий уровень шумов (на 45 %), чем аналогичный время – инвариантный фильтр.

Если ключ активного интегратора замыкать только на время существования одной полуволны, скажем, положительной, сигнала дифференциатора (рис. 5.12, а), то функция памяти такого фильтра будет иметь треугольный вид и, следовательно, шумовые свойства такого фильтра будут такими же, как у времени – инвариантного треугольного фильтра.

Вид переходной функции и функции памяти показан на

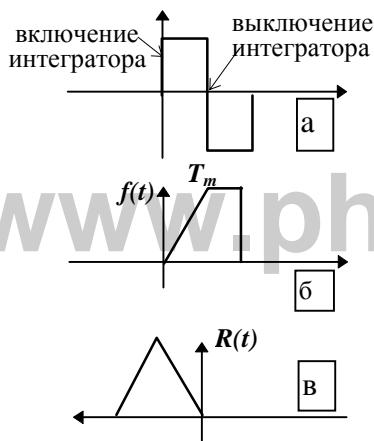
рис. 5.12, б, в.

Рис. 5.12

### Фильтр «RC–CR + управляемый интегратор»

Вопрос о шумовых свойствах такой структуры возникает естественным образом как только дело доходит до измерения амплитуды сигнала с выхода фильтра с помощью какого-либо аналого-цифрового преобразователя (АЦП). RC–CR фильтр здесь выбран в качестве примера.

Дело в том, что входные цепи любого АЦП имеют конечное



быстродействие, что эквивалентно дополнительному интегрированию. Более того, часто для измерения амплитуды сигнала после фильтров используют ЗЦП (зарядо – цифровые преобразователи), измеряющие заряд, поступивший на их вход в течение сигнала управления.

Сигнал управления подается в момент достижения измеряемым сигналом максимума (рис. 5.13). Здесь  $t_d$  и  $t_g$  соответственно задержка и длительность сигнала управления.

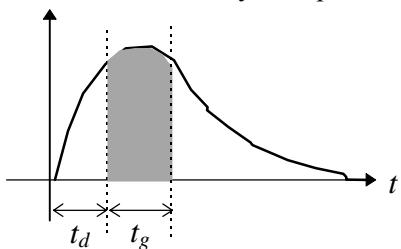


Рис. 5.13

Вычисления шумовых индексов для рассматриваемой ситуации довольно громоздки. Рассмотрим и прокомментируем лишь конечные результаты, которые приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1

$t_g/\tau$	0	0,5	1,0	1,6	1,7	1,8	2,5	4,2	10,0
относительный шум	1,0	0,927	0,887	0,87	0,87	0,87	0,886	1,0	1,55

За единицу принят уровень шума обычного RC–CR фильтра при оптимальном значении постоянной времени  $\tau = \tau_{opt}$ .

Видно, что уровень шума системы *RC–CR + управляемый интегратор* по отношению к обычному RC–CR фильтру имеет пологий минимум (-13 %) при  $t_g/\tau = 1,7$  и равен 1 при  $t_g/\tau = 0$  и  $t_g/\tau = 4,2$ . Заметим, что  $t_g/\tau = 0$  соответствует измерению сигнала в точке.

Что касается  $t_d$ , то её величина определяется условием получения максимума сигнала при заданной величине  $t_n$

$$t_d = \frac{t_g}{e^{\frac{t_g}{\tau}} - 1}. \quad [5.2.12]$$

Если  $\tau/\tau_{opt} = 0,2$ , то при  $t_g/\tau = 2,5$  относительный шум равен 1. Это означает, что можно существенно уменьшить длительность импульса фильтра без ухудшения шумовых свойств.

### Оптимальный фильтр

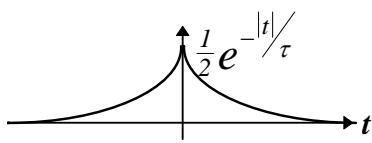


Рис. 5.14

Как было показано ранее [5.1.5], переходная функция оптимального фильтра имеет вид (рис. 5.14); в силу симметрии функции относительно максимума (момента измерения) функция памяти имеет точно такой же вид. С точностью до множителя  $\frac{1}{2\tau}$  такой же вид имеет и её производная.

Прямое вычисление шумовых индексов дает:

$$\overline{N_s^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = \tau, \quad [5.2.13]$$

$$\overline{N_s^2} = \frac{1}{2\tau^2} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = \frac{1}{\tau}. \quad [5.2.14]$$

Таким образом, оптимальный фильтр при тех же условиях имеет лучшее отношение сигнал/шум (на 36 %), нежели CR–RC фильтр. Уровень шума оптимального фильтра при сравнении с другими фильтрами принимается за единицу.

К сожалению, теоретически оптимальная CUSP–форма не может быть реализована практически. Наилучшим с технической точки зрения приближением является симметричная колоколообразная (гауссова) форма, которая может быть реализована при использовании большого числа следующих друг за другом интегрирующих RC – цепочек. Именно такие фильтры предпочтита-

ют использовать в больших многоканальных детекторах, когда оптимизированные под конструкцию конкретного детектора временные параметры фильтров и коэффициенты усиления далее остаются неизменными.

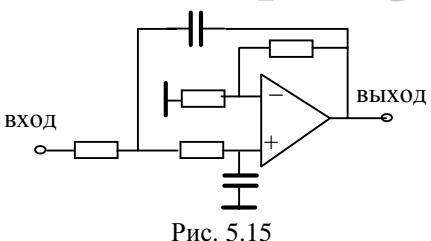


Рис. 5.15

Универсальные фильтры, предназначенные для работы с разными источниками сигналов, строятся, как правило, с использованием активных интеграторов. Преимущество такого фильтра перед большим числом пассивных интеграторов состоит в том, что в последних при изменении временных параметров одновременно меняется и усиление, в то время как в активном фильтре временные константы и усиление могут быть заданы независимо друг от друга.

На рис. 5.15 приведена схема двухполюсного активного фильтра. В реальных устройствах возможно использование нескольких каскадов, включенных друг за другом.

77

**www.phys.nsu.ru**

**www.phys.nsu.ru**

**www.phys<sup>78</sup>.nsu.ru**

## Приложение 1.

### Корреляционные функции некоторых импульсных сигналов.

#### P1.1. Гауссов импульс.

Для гауссовых сигналов  $v_1 = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma_1}\right)^2}$  и  $v_2 = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\tau}{\sigma_2}\right)^2}$

$$\psi_{12}(\tau) = \int e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{t}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{(t-\tau)}{\sigma_2}\right)^2\right]} dt. \quad (P1.1)$$

Путем «дополнения до квадрата» показателя подинтегрального выражения можно получить:

$$\psi_{12}(\tau) = K e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)^2\right]}. \quad (P1.2)$$

Полученное выражение показывает, что взаимная корреляционная функция двух гауссовых импульсов есть также гауссов импульс со стандартным отклонением:

$$\sigma_{12} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad (P1.3)$$

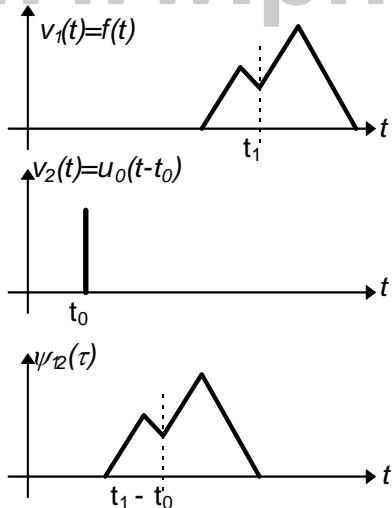
в частности, автокорреляционная функция гауссова сигнала :

$$\psi_{11} = K e^{-\frac{1}{2}(\sigma\sqrt{2})^2}. \quad (P1.4)$$

Для функции  $\psi_{12}$  легко определить коэффициент  $K$ , воспользовавшись тем, что  $\psi_{12}(\tau=0)$  равна энергии сигнала:

$$\psi_{11}(0) = K = \int [v(t)]^2 dt = \int e^{-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2} dt = \sigma\sqrt{\pi}. \quad (P1.5)$$

# П1.2.Импульс и линейный импульс.



Линейный импульс  $u_0(t - t_0 - \tau)$  отличен от нуля только около точки  $t = t_0 + \tau$ , поэтому интеграл

$\psi_{12}(\tau) = \int f(t) u_0(t - t_0 - \tau) dt$  представляет импульс площадью  $\psi_{12}(\tau) = u_0 f(\tau + t_0)$ .

Таким образом, корреляционная функция  $\psi_{12}(\tau)$  для короткого сигнала, расположенного в точке  $t_0$ , подобна  $v_1(t) = f(t)$ , сдвинутой влево на  $t_0$  (рис.П1.1)

Рис.П1.1

# П1.3.Импульс и периодическая последовательность линейных импульсов.

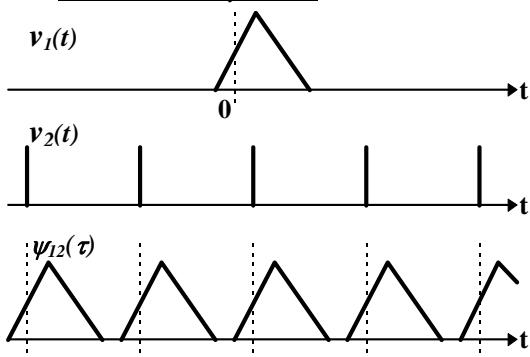


Рис.П1.2

Из рисунка П1.2 видно, что периодический сигнал можно интерпретировать как корреляционную функцию импульсного сигнала  $v_1(t)$  и периодической последовательности линейных импульсов  $v_2(t)$ .

Рассмотрим одно важное свойство корреляционной функции  $\psi_{12}$ , которое очень полезно для ее вычисления по параметрам исходных сигналов  $v_1$  и  $v_2$ .

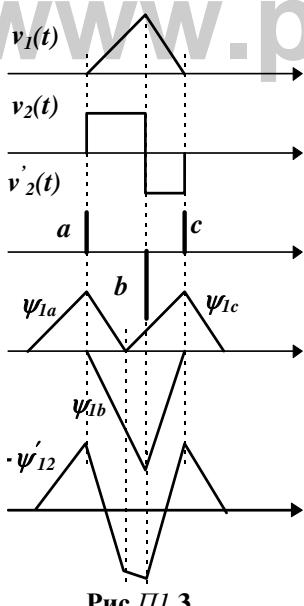
Обозначим:

$$\psi_{12}^{(k)}(\tau) = \frac{d^k}{d\tau^k} \psi_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \psi_{12}^{(k+1)}(\tau)d\tau. \quad (П1.6)$$

Ввиду равенства двух интегралов (1.10.3) в определении взаимной корреляционной функции, дифференцирование или интегрирование функции  $\psi_{12}$  по  $\tau$  можно провести путем дифференцирования или интегрирования функций  $v_1$  или  $v_2$  под знаком интеграла:

$$\psi_{12}^{(k)}(\tau) = (-1)^k \int v_1(t) [v_2^{(k)}(t-\tau)]^* dt = \int v_1^{(k)}(t+\tau) [v_2(t)]^* dt. \quad (П1.7)$$

$$\psi_{12}^{(j+k)}(\tau) = (-1)^k \int v_1^{(j)}(t) [v_2^{(k)}(t-\tau)]^* dt. \quad (П1.8)$$



Аналогичную запись можно сделать и в случае интегрирования. Таким образом, взаимная корреляционная функция не изменится (с точностью до знака), если в подинтегральном выражении  $v_1$  проинтегрировать, а  $v_2$  продифференцировать (или наоборот) несколько раз.

На рисунке (П1.3) показано, как можно применять это свойство корреляционных функций.

Производная от  $v_2$  состоит из трех линейных импульсов ( $a, b, c$ ) с площадями, равными величине перепадов функции  $v_2$ . Каждый из них совместно с  $v_1$

порождает свою взаимную корреляционную функцию  $\psi_{1a}, \psi_{1b}, \psi_{1c}$ . Их сумма (нижний рисунок) равна производной с обратным знаком от  $\psi_{12}$ .

Таким образом, процедура нахождения взаимной корреляционной функции двух сигналов заметно упрощается, если один из них путем одного или нескольких дифференцирований приводится к ряду линейных импульсов. Для этого сигнал можно аппроксимировать ломаной линией, тогда вторая производная будет набором линейных импульсов.

П1 --4

## Приложение 2. Некоторые основные свойства рядов Фурье.

Ниже приводятся наиболее важные соотношения, которые непосредственно следуют из (1.13.4) и (1.13.6) при обычных допущениях о сходимости, дифференцируемости и интегрируемости.

Обозначим двойной стрелкой прямое и обратное Фурье-преобразование:

$$v(t) \leftrightarrow V_n. \quad (\text{П2.1})$$

Пусть теперь имеется другой сигнал  $w(t)$  с тем же периодом и коэффициентами ряда  $W_n$ . Тогда можно записать:

наложение -  $av(t) + bw(t) \leftrightarrow aV_n + bW_n, \quad (\text{П2.2})$

перемена знака -  $v(-t) \leftrightarrow V_{-n}, \quad (\text{П2.3})$

задержка -  $v(t-t_0) \leftrightarrow V_n e^{-j\omega_n t_0}, \quad (\text{П2.4})$

модуляция -  $v(t)e^{jm\omega_1 t} \leftrightarrow V_{n-m}, \quad (\text{П2.5})$

дифференцирование -  $\frac{d^k v(t)}{dt^k} \leftrightarrow (j\omega_n)^k V_n, \quad (\text{П2.6})$

интегрирование -  $\int_{t_0}^t [v(t) - \bar{v}] dt \leftrightarrow \frac{V_n}{j\omega_n}, n \neq 0, \quad (\text{П2.7})$

корреляция -  $v(t)w^*(t-\tau) \leftrightarrow V_n W_n^*, \quad (\text{П2.8})$

свертка -  $\overline{v(t)w(\tau-t)} \leftrightarrow V_n W_n, \quad (\text{П2.9})$

умножение -  $v(t)w(t) \leftrightarrow \sum_i V_i W_{i-n}, \quad (\text{П2.10})$

умножение сопряженных функций -

$$v(t)w^*(t) \leftrightarrow \sum_i V_i W_{i-n}^*. \quad (\text{П2.11})$$

Как видно из приведенных соотношений, существует взаимное соответствие между парами операций: задержки и модуляции, корреляции и умножения сопряженных функций, свертки и умножения.

**www.phys.nsu.ru**

Это является следствием того, что преобразование  $\leftrightarrow$  по существу выражает «поворот координат», поэтому преобразование в одном направлении должно иметь, в основном, те же свойства, что и преобразование в обратном направлении.

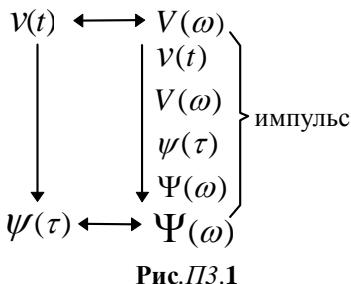
**www.phys.nsu.ru**

**www.phys.nsu.ru**

# www.phys.nsu.ru

## Приложение 3. Сопоставление спектров.

Ниже на рисунках приводится сводка различных преобразований.  
Двойными стрелками обозначены обратимые, а одиночными -



необратимые преобразования.

Имеется два пути от импульсного сигнала  $V(t)$  ( Рис.П3.1) к его спектру плотности энергии  $\Psi(\omega)$ , один - через спектр сигнала к квадрату его модуля, другой - через автокорреляционную функцию к её преобразованию Фурье.

На рис.П3.2 приведена соответствующая диаграмма для периодических сигналов. Заметим, что спектр плотности мощности  $\Phi(\omega)$  не равен квадрату модуля спектра мощности, но площадь

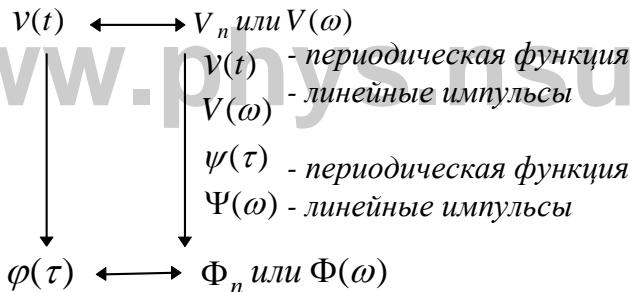


Рис.П3.2

каждого импульса в спектре  $\Phi(\omega)$  равна квадрату площади соответствующего импульса в спектре  $V(\omega)$ .

Для случайных сигналов, происходящих от стационарных процессов имеется только один удобный путь от сигнала  $V(t)$  к его спектру плотности мощности (рис.П3.3).

## Размерности сигналов:

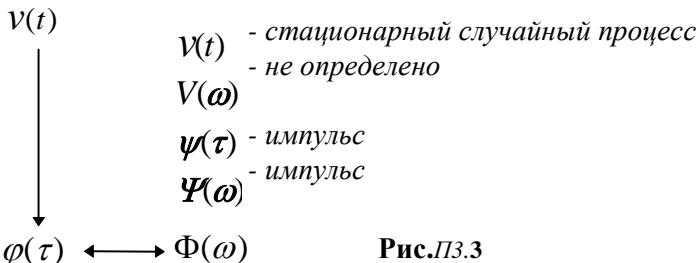


Рис.П3.3

$V(t)$ ,  $V_n$  - в (вольт на 1ом),  $V(\omega)$  - в/гц = в·сек,

$\psi(\tau)$  - дж ( $\text{в}^2 \cdot \text{сек}/\text{ом}$ ),  $\Psi(\omega) = |V(\omega)|^2$  - дж·сек,

$\phi(\tau)$ ,  $\Phi_n$  - вт ( $\text{в}^2 / \text{ом}$ ),  $\Phi(\omega)$  - вт/гц = дж.

## Некоторые импульсные сигналы и их спектры.

В качестве первого примера рассмотрим гауссов импульс. Как уже отмечалось ранее, автокорреляционная функция гауссова сигнала имеет также гауссов вид, следовательно, его спектр представляет также гауссову кривую. Инвариантность гауссова сигнала при преобразованиях Фурье заслуживает более подробного рассмотрения.

Найдем условия, при которых функция является своим собственным преобразованием. Вспомним, что:

$$\frac{dv}{dt} \leftrightarrow j\omega V(\omega) \text{ и } tv(t) \leftrightarrow j \frac{dV(\omega)}{d\omega}. \quad (\text{П3.1})$$

Следовательно, если

$$\frac{dv}{dt} = \pm tv(t), \quad (\text{П3.2})$$

то на основании симметрии  $\frac{dV(\omega)}{d\omega} = \pm \omega V(\omega)$ , (П3.3)

т.е., сигнал и его преобразование представляют одну и ту же функцию. Разделяя переменные в (????), получим:  $\frac{dV(\omega)}{V} = \pm t dt$ ,

$$\ln v = \pm \frac{1}{2} t^2. \quad (\text{П3.4})$$

Решение со знаком плюс следует отбросить, т.к. при этом получается сигнал, не допускающий преобразования. Таким образом:

$$v(t) = e^{(-1/2)t^2} \text{ и } V(\omega) = K e^{(-1/2)\omega^2}, \quad (\text{П3.5})$$

где  $K$  - постоянный коэффициент.

Для определения  $K$  нужно воспользоваться равенством энергии сигнала и его спектра:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} V^2 \frac{d\omega}{2\pi}, \text{ или } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{K}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega. \quad (\text{П3.6})$$

В силу тождественности подинтегральных выражений получаем:

$$K = \sqrt{2\pi} \text{ и } e^{(-1/2)t^2} \leftrightarrow \sqrt{2\pi} e^{(-1/2)\omega^2}. \quad (\text{П3.7})$$

Довольно просто можно показать, что при изменении масштаба справедливо:

$$v(t/a) \leftrightarrow aV(\omega a). \quad (\text{П3.8})$$

В результате, между гауссовым сигналом, его спектром, корреляционной функцией и спектром корреляционной функции имеют место соотношения, проиллюстрированные на рис. П3.4(а-д).

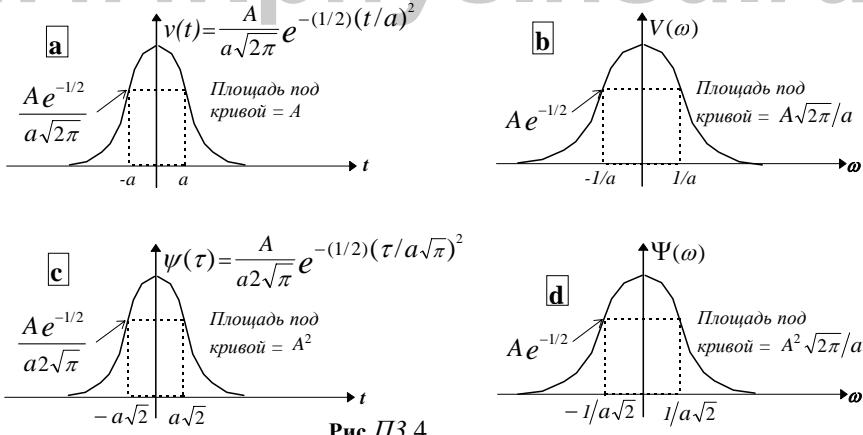


Рис.П3.4

Положение масштабного параметра  $a$  показывает, что ширина спектра обратно пропорциональна длительности импульса. Это общее свойство особенно наглядно проявляется в предельных случаях, показанных на рис.П3.5.

На рисунках **a - d** показаны предельные формы при малом параметре  $a$ . Линейный импульс, как явствует из рисунков, имеет равномерный спектр. Бесконечная площадь под кривой плотности

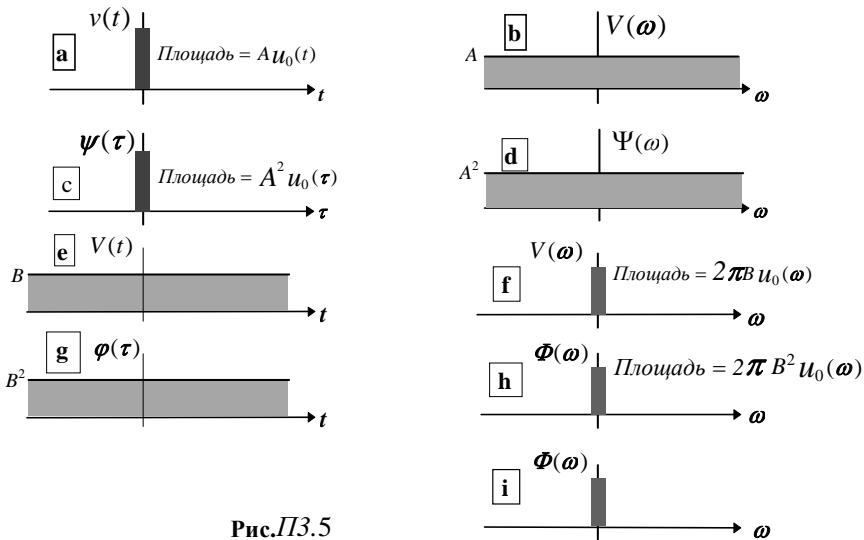


Рис.П3.5

энергии  $\Psi(\omega)$  отражает тот факт, что линейный импульс имеет бесконечную энергию.

На рисунках **e - i** показан другой случай, когда параметр  $a \Rightarrow \infty$ , а отношение  $A/a \Rightarrow B\sqrt{2\pi}$ , где  $B$  - константа. Чтобы автокорреляционная функция имела смысл, надо перейти от  $\psi(\tau)$  к  $\phi(\tau)$ .

Постоянный сигнал имеет спектр в виде линейного импульса. Вся его мощность сосредоточена в одной гармонике с нулевой частотой. Заметим, что площадь линейного импульса спектра плотности напряжения только в том случае, если оба спектра построены в зависимости от действительной частоты  $\omega/2\pi$  (см. рис.**f,h,i**).

### Спектр прямоугольного импульса.

Непосредственное вычисление выражения для спектра прямоугольного импульса не представляет никаких трудностей, но мы воспользуемся несколько иным приемом, чтобы продемонстрировать возможности использования свойств линейных импульсов.

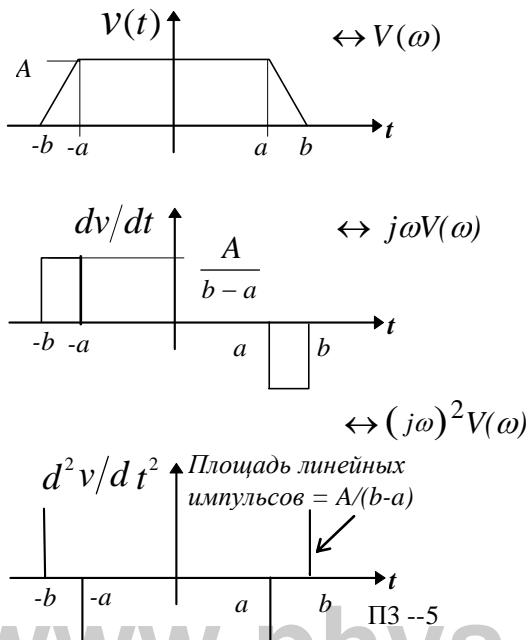


Рис.П3.6

Прямоугольный импульс является частным случаем трапециoidalного импульса. После двойного дифференцирования из него получаются четыре линейных импульса, и соответствующий спектр равен исходному спектру, умноженному на  $(j\omega)^2$  (см. рис.П3.6).

Имея ввиду соответствие:

$$V(t - t_0) \leftrightarrow V(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

и учитывая вид только

что найденного спектра линейного импульса, можно найти спектр второй производной:

$$\frac{A}{b-a} \left[ (e^{jb\omega} + e^{-jb\omega}) - (e^{ja\omega} + e^{-jb\omega}) \right] = (j\omega)^2 V(\omega) \quad (\text{П3.9})$$

а искомый спектр:

$$V(\omega) = \frac{A}{b-a} \left[ \frac{\cos a\omega - \cos b\omega}{\omega^2} \right]. \quad (\text{П3.10})$$

Выражение для спектра можно записать в ином виде:

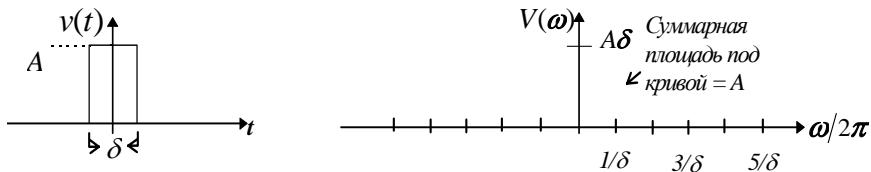


Рис.П3.7

$$V(\omega) = (a+b)A \left\{ \frac{\sin\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)\omega\right]}{\left(\frac{a+b}{2}\right)\omega} \right\} \left\{ \frac{\sin\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)\omega\right]}{\left(\frac{b-a}{2}\right)\omega} \right\}. \quad (\text{П3.11})$$

При  $a=b=\delta/2$  получаем прямоугольный импульс (рис.П3.7) со спектром:

$$V(\omega) = A\delta \left[ \frac{\sin(\delta\omega/2)}{\delta\omega/2} \right]. \quad (\text{П3.12})$$

Ниже на рис.П3.8 приведены вид автокорреляционной функции  $\psi(t)$  прямоугольного сигнала и ее спектр  $\Psi(\omega)$ , который, как было установлено ранее, является спектром плотности энергии и в данном случае равен квадрату  $V(\omega)$ , поскольку функция  $v(t)$  действительная и четная.



Рис.П3.8

Положив  $a = 0$  и  $b = \delta$  в П3.11 получим спектр треугольного импульса:

$$V(\omega) = A\delta \left[ \frac{\sin(\delta\omega/2)}{\delta\omega/2} \right]^2. \quad (\text{П3.13})$$

Отметим, что треугольный сигнал можно представить как автокорреляционную функцию прямоугольного сигнала с соответствующими коэффициентами, поэтому его спектр совпадает со спектром  $\Psi(\omega)$  для прямоугольного импульса.

## Пилообразный сигнал.

Использованный прием с дифференцированием в несколько усложненном виде применим и в менее удобных случаях, как, например, пилообразный импульс (рис.П3.9).

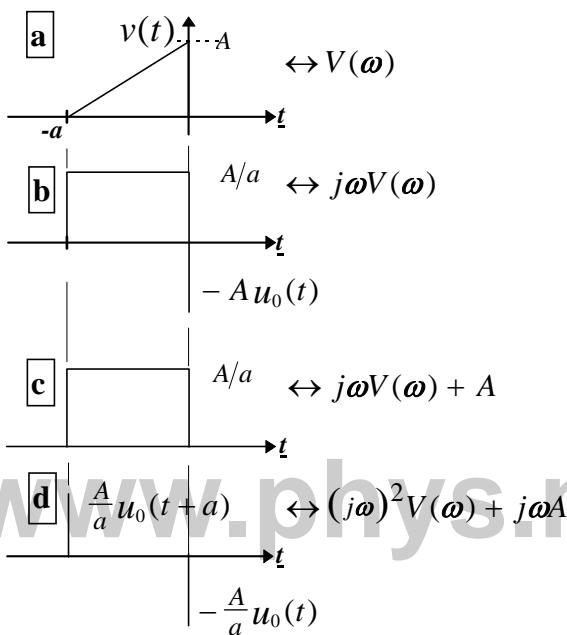


Рис.П3.9

Простым дифференцированием этот сигнал не сводится к набору линейных импульсов. Так после первого дифференцирования получаем прямоугольный и линейный импульсы (b). Добавим такой же величины, но положительной полярности линейный импульс, чтобы они взаимно уничтожились (c). Останется прямоугольный сигнал, в спектре которого добавлен равномерный спектр линейного импульса. Теперь продифференцируем еще раз и получим два линейных импульса (d).

Таким образом:

$$\frac{A}{a} (e^{j\omega a} - 1) = (j\omega)^2 V(\omega) + j\omega A. \quad (\text{П3.14})$$

Решая это уравнение относительно  $V(\omega)$ , находим:

$$V(\omega) = A \left( \frac{1 + j\omega a - e^{j\omega a}}{a\omega^2} \right). \quad (\text{П3.15})$$

Спектр, как видно, содержит действительную и мнимую составляющие:

$$\operatorname{Re} V(\omega) = A \frac{1 - \cos \omega a}{a \omega^2} = \frac{1}{2} A a \left( \frac{\sin \frac{\omega a}{2}}{\frac{a \omega}{2}} \right)^2, \quad (\text{П3.16})$$

$$\operatorname{Im} V(\omega) = j A \frac{\omega a - \sin \omega a}{a \omega^2}, \quad (\text{П3.17})$$

относящиеся, соответственно, к четной и нечетной составляющим сигнала. Сравнивая (П3.15) с (П3.12) замечаем, что четная составляющая пилообразного сигнала имеет вид треугольника половинной амплитуды (рис.П3.10а).

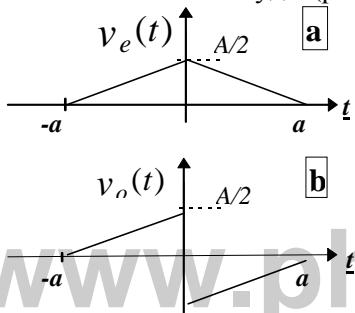


Рис.П3.10

Вид нечетной составляющей легко найти как разность между исходным сигналом и его четной составляющей. И ещё - нечетный сигнал вида (b) может быть получен сложением пилообразного сигнала с его зеркальной копией противоположной полярности, т. е.  $V_0(t) = V(t) - V(-t)$ . Принимая во внимание, что  $V(-t) \leftrightarrow V(-\omega)$ , выражение (П3.17) можно получить вычитанием спектров  $V(\omega)$  и  $V(-\omega)$ .

### Экспоненциальный сигнал.

Для определения спектра экспоненциального сигнала поступим аналогичным образом. После первого дифференцирования получается линейный импульс и экспонента (рис.П3.11б). Добавим единичный импульс отрицательной полярности и получим остаток в виде экспоненты отрицательной полярности (с). Сигналы (рис.а,с) отличаются множителем  $-a$ , следовательно, и их спектры отличаются на такой же множитель:

$$-aV(\omega) = j\omega V(\omega) - 1. \quad (\text{ПЗ.18})$$

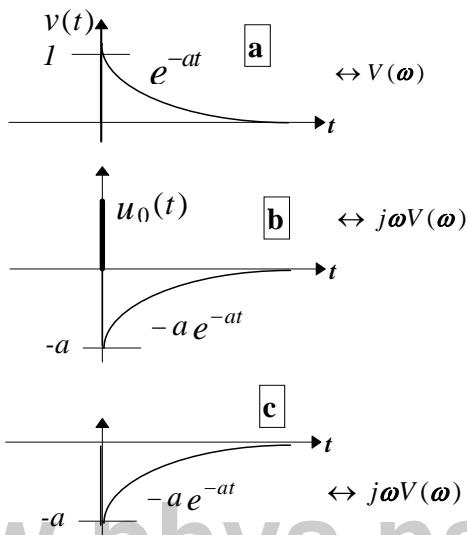


Рис.ПЗ.11

Откуда находим:

$$V(\omega) = \frac{1}{a + j\omega} = V_r + jV_i, \quad (\text{ПЗ.19})$$

$$\text{где } V_r = \frac{a}{a^2 + \omega^2} \text{ и } V_i = \frac{-\omega}{a^2 + \omega^2}. \quad (\text{ПЗ.20})$$

Ниже на рисунках ПЗ.12 изображены различные спектры, относящиеся к экспоненциальному сигналу.

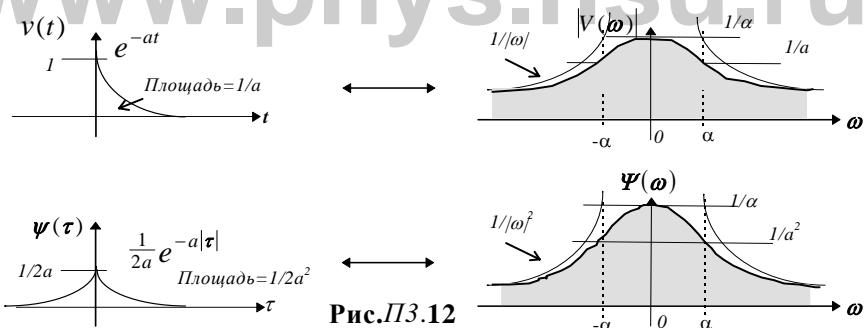


Рис.П3.12

### Периодическая последовательность экспоненциальных импульсов.

В пределах одного периода периодическую последовательность экспоненциальных сигналов можно описать в виде:

$$v(t) = \frac{1}{1 - e^{-aT}} e^{-aT}. \quad (\text{П3.21})$$

Множитель перед экспонентой отражает наличие наложений сигналов, состоящее в том, что к моменту появления очередного сигнала «хвост» предыдущего сигнала имеет значение отличное от нуля.

Вид спектра можно найти путем прямого вычисления:

$$V_n = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{1 - e^{-aT}} \int_0^T e^{-aT} e^{-j\omega_n t} dt = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{a + j\omega_n}, \quad (\text{П3.22})$$

что с точностью до множителя  $1/T$  совпадает с (П3.19).

Этот простой пример сам по себе вряд ли заслуживал бы отдельного рассмотрения, но на нём легко продемонстрировать некий вычислительный прием, который будет использован далее для описания случайных сигналов.

В Приложении 1 уже говорилось, что периодический сигнал можно рассматривать как корреляционную функцию импульсного сигнала  $v_1(t)$  и периодической последовательности линейных импульсов  $v_2(t)$  (рис.П3.13а,с).

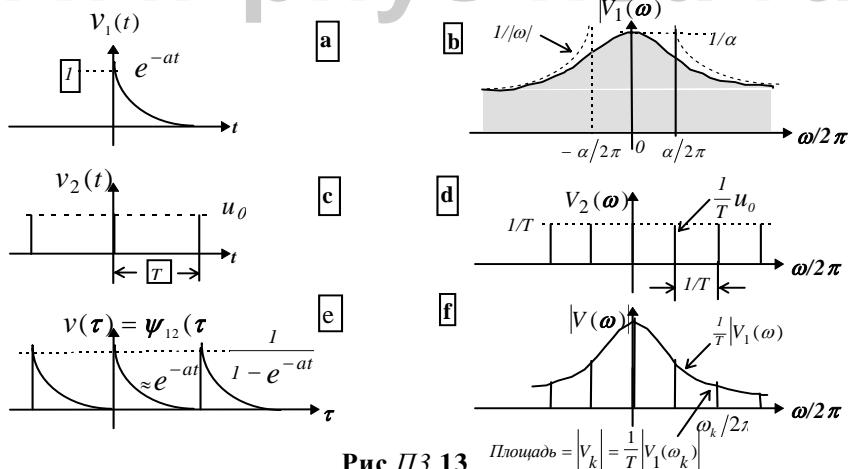


Рис.П3.13

$$\text{Площадь} = |V_k| = \frac{1}{T} |V_1(\omega_k)|$$

Пусть  $v_1(t) = e^{-at}$ ,  $v_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_0(t - nT)$ .

Спектры сигналов показаны, соответственно, на рис. **б** и **д**. На рис. **е** показана корреляционная функция сигналов  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$ . По определению:

$$\psi_{12}(\tau) = \int v_1(t) \cdot v_2(t - \tau) dt = \sum_{n=\min}^{\infty} e^{-at} u_0(t - nT - \tau) = \sum_{n=\min}^{\infty} e^{-a(nT + \tau)} \quad (\text{П3.23})$$

Здесь учтено, что функция  $u_0(t - nT - \tau)$  отлична от нуля только при  $t = nT + \tau$ . Необходимо только сделать одно важное уточнение. Функция  $v_1(t)$  определена для  $t \geq 0$ , поэтому от величины  $\tau$  будет зависеть минимальное значение  $n$ .

$$n_{\min} \geq -\text{Int}(\tau / T). \quad (\text{П3.24})$$

С учетом этого получаем:

$$\psi_{12}(\tau) = e^{-a\tau'} \sum_{n=\min}^{\infty} e^{-anT} = \frac{1}{1 - e^{-aT}} e^{-a\tau'}, \quad (\text{П3.25})$$

где  $\tau' = |\tau - T \cdot \text{Int}(\tau / T)|$ . Т. е.,  $\psi_{12}(\tau)$  действительно представляет периодически повторяющиеся сигналы (см. П3.21).

Из свойств преобразования Фурье следует, что спектр корреляционной функции двух вещественных сигналов равен произведению их спектров (рис.П3.13f).

Таким образом:

если сигнал может быть представлен в виде корреляционной функции двух более простых сигналов, то его спектр равен произведению спектров этих сигналов.

Некоторые случайные сигналы конечной мощности и их спектры.

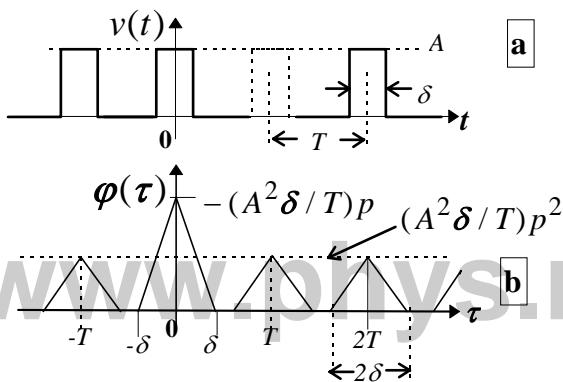


Рис.П3.14

функция сигнала. Её величина при  $\tau = 0$  равна среднему квадрату сигнала, а т. к. можно ожидать в среднем  $p$  импульсов за период, то средняя мощность сигнала равна  $A^2 \delta p / T$ .

При увеличении сдвига автокорреляционная функция уменьшается линейно. При сдвиге в один период происходит наложение сигнала и его сдвинутой копии. Произведение двух импульсов не равно нулю только в том случае, если появляются оба импульса. По сделанному предположению появление каждого сигнала не зависит от появления других, поэтому совпадение двух импульсов происходит с вероятностью  $p^2$ .

Рассмотрим периодическую последовательность прямоугольных сигналов, из которой сигналы выключаются случайно и независимо с вероятностью  $(1 - p)$ , т. е. каждый импульс имеет вероятность появления  $p$  (рис.П3.14а).

На рис. б показана автокорреляционная

При сдвиге на  $\pm 2T$ ,  $\pm 3T$ , картина будет повторяться, следовательно, вид корреляционной функции при сдвиге соответствует периодической составляющей сигнала; при  $\tau = 0$  имеет место наложение периодической и случайной составляющих сигнала.

Для удобства анализа разделим автокорреляционную функцию на две части:  $\varphi_r(\tau)$  (рис. П3.15а), отвечающую за случайную составляющую процесса, и  $\varphi_p(\tau)$  (рис. П3.15с), отвечающую за его периодическую часть. На рис. б и д показаны их спектры мощности.

«Периодическая средняя мощность» равна  $\varphi_p(0)$ , а её доля от полной средней мощности  $\varphi(0)$  составляет  $p$ . При  $p \rightarrow 1$  эта доля также стремится к единице, соответственно, случайная составляющая стремится к нулю. При малых  $p$  сигнал становится

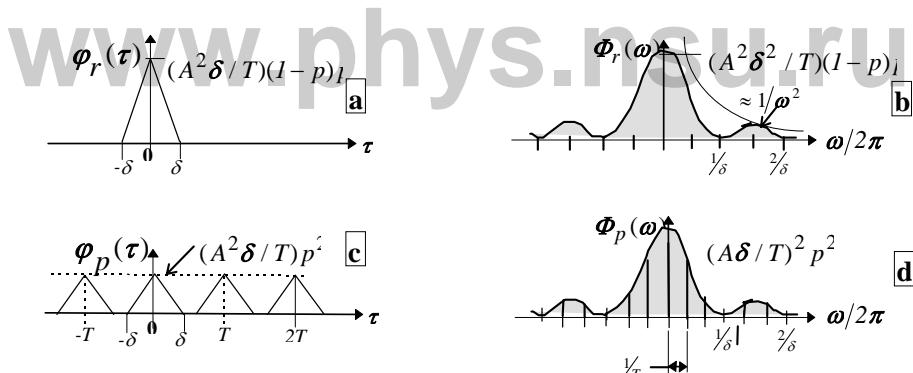


Рис.П3.15

чисто случайнм.

Рассмотрим важный частный случай, когда импульсы (рис.П3.14а) очень короткие и примыкают друг к другу. Введем обозначения:

$$A\delta = a, \quad p/T = n_0, \quad \delta = T. \quad (\text{П3.26})$$

Мощность постоянной составляющей, выраженная через новые

При одновременном стремлении  $T, \delta, p$  к нулю при постоянных  $a$  и  $n_0$  спектр периодической составляющей сигнала (рис.П3.15d) сжимается к постоянной составляющей; спектр плотности мощности случайной составляющей становится равномерным, стремясь к величине :

$$\left(\frac{A^2 \delta^2}{T}\right)(1-p)p \rightarrow a^2 n_0. \quad (\text{П3.28})$$

В пределе сигнал и его спектр принимают формы, изображенные, соответственно, на рис.П3.16а и б.

Линейные импульсы распределены по времени случайно и независимо, и сигнал имеет только два параметра: площадь  $a$  и среднюю плотность  $n_0$ . Такой сигнал называется *распределением линейных импульсов* по закону Пуассона. Иногда его называют дробовым шумом по аналогии с *направленным потоком* электронов в проводниках, вакуумных лампах и т. д.

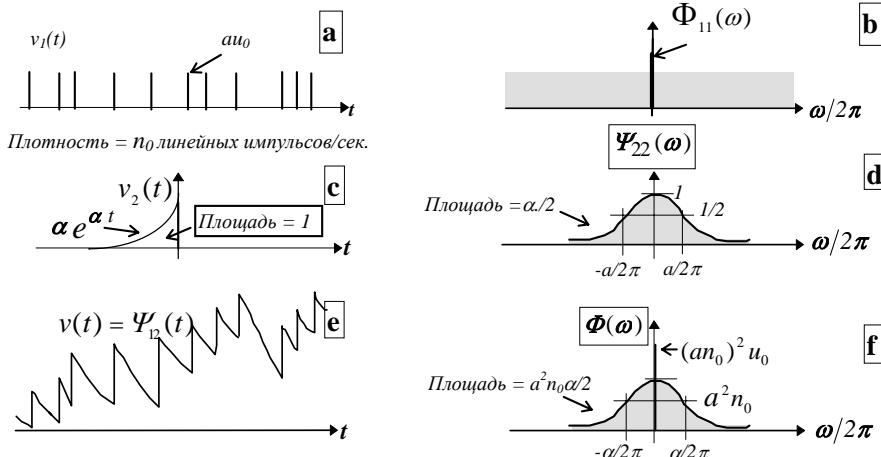


Рис.П3.16

Корреляционная функция пуассоновского распределения

линейных импульсов и сигнала, изображенного на рис.П.3.16с, образуют случайный сигнал стационарного процесса (рис.е), у которого спектр плотности мощности (рис.ф) равен произведению спектров на рис.б и д.

Последнее утверждение следует из того, что спектр корреляционной функции двух действительных сигналов равен произведению их спектров.

При уменьшении параметра  $\alpha$  (рис.П3.16с) флюктуации (переменная составляющая) сигнала на рис.е уменьшаются. Из спектра плотности мощности (рис.ф). видно, что отношение мощностей переменной и постоянной составляющих равно  $a/2n_0$ , но это не дает информации о распределении величин сигнала.

Для выяснения этого вопроса упростим задачу - заменим экспоненциальный импульс (рис.с) прямоугольным импульсом. Мгновенное значение сигнала на рис.е будет определяться числом импульсов, попадающих в интервал, равный длине импульса. Следовательно, чтобы определить распределение величин сигналов, необходимо знать относительные вероятности попадания различного числа импульсов с пуссоновским распределением в заданный интервал времени. Эта вероятность равна:

$$p_n(t) = \frac{(n_0 t)^n e^{-n_0 t}}{n!}, \quad (\text{П3.29})$$

где  $p_n(t)$  - вероятность попадания  $n$  в интервал  $t$  при их средней плотности (количество в единицу времени)  $n_0$ . Наиболее вероятное значение  $n$  равно среднему их количеству в интервале  $t$ , т. е.  $n_0 t$ . Если количество импульсов в заданном интервале велико, то распределение (П.3.29) приближается к нормальному (гауссову), становясь в пределе нормальной функцией плотности вероятности.

В нашем примере это означает, что если эффективная длительность прямоугольного импульса охватывает большое число линейных импульсов, то сигнал на рис.е должен иметь нормальное распределение амплитуд около некоторого ненулевого среднего значения:

$$p(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\bar{v}}{\sigma}\right)^2\right], \quad (\text{П3.30})$$

где  $(\bar{v})^2 = (an_0)^2$  - мощность постоянной составляющей, (П3.31)

$\sigma^2 = \overline{(v_a^2)} = (a^2 n_0 \alpha) / 2$  - мощность переменной составляющей.

(П3.32)

### Взаимная корреляция спектров.

Выше было показано, что спектр корреляционной функции двух сигналов равен произведению их спектров. Можно показать, что обратное тоже справедливо - если сигнал представить в виде произведения двух более простых сигналов, то его спектр можно найти как корреляционную функцию спектров этих более простых сигналов.

Так, например, синусоида конечной длительности (рис.П3.17.g) может быть представлена как произведение синусоиды (рис.а) и прямоугольного импульса (рис.е), поэтому ее спектр (рис.х) можно получить, поместив копию спектра прямоугольного импульса (рис.ф) на каждой частоте, содержащейся в спектре синусоиды (рис.б).

Аналогично спектр на рис.ј представляет корреляцию, или свертку, спектров на рис.д и ф. В данном случае корреляция и свертка равнозначны, т. к. сигналы действительные и четные.

При увеличении длины отрезка синусоиды ширина каждого из двух главных лепестков спектра уменьшается, поскольку, чем длиннее сигнал, тем уже интервал частот, охватываемый каждым его спектральным лепестком.

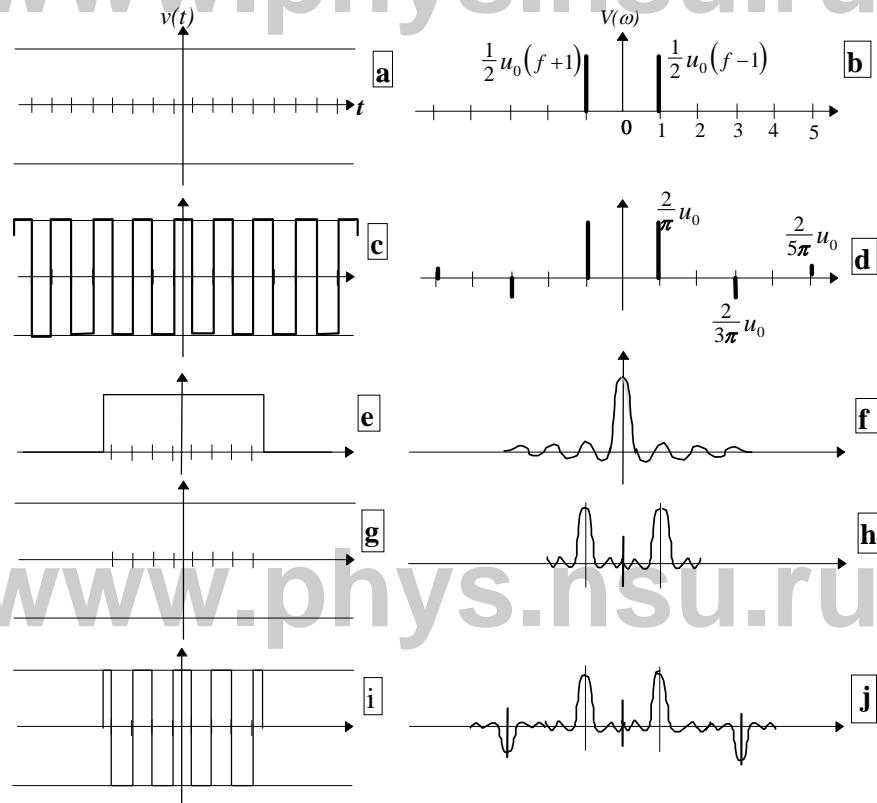


Рис.ПЗ.17

Теорема о дискретных выборках.

Теорема о дискретных выборках следует из спектральной свертки и умножения сигналов. Пусть сигнал, изображенный на рис.ПЗ.18а, имеет спектр (рис.б), содержащий очень мало энергии за пределами  $f_0$ . Предположим далее, что сигнал умножается на периодическую последовательность линейных импульсов (рис.с). Произведение  $v_s(t)$  называется выборочным дискретным сигналом, а частота  $f_s = 1/T$  - частотой выборки.

Из рассмотрения спектра на рис.ф следует, что, если отдельные спектральные «импульсы» не накладываются друг на друга, то

спектр содержит не меньше информации об исходном сигнале, чем

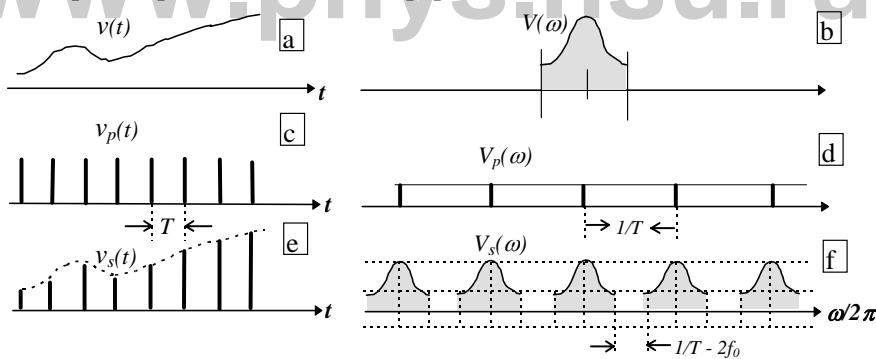


Рис.ПЗ.18

исходный спектр на рис.б.

В общем случае исходный спектр нельзя восстановить, если промежуток  $f_s - 2f_0$  отрицателен. Иначе говоря, чтобы сигнал можно было восстановить обычными средствами, его нужно выбирать по крайней мере дважды в течение каждого периода его наивысшей частотной составляющей:

$$f_s \geq 2f_0. \quad (\text{ПЗ.33})$$

# **www.phys.nsu.ru**

- Литература
1. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Мир, 1986.
  2. Гоноровский И. С. Радиосигналы и переходные явления в радиоцепях. М.: Радио и связь, 1954.
  3. Зиновьев А. Л., Филимонов Л. И. Введение в теорию сигналов и цепей. М.: Высш. шк., 1968.
  4. Давенпорт В. Б. и Руут В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. М.: Иностр. Лит. 1960 .
  5. Жеребцов И. П. Радиотехника. М.: Связь, 1965.
  6. Атабеков Г. Н. Основы теории цепей. М.: Энергия 1969.
  7. Кугушев А. М. и Голубева Н. С. Основы радиоэлектроники. М.: Энергия, 1969.
  8. Меерович А., Зеличенко Л. Г. Импульсная техника. М.: Сов. радио, 1954.
  9. Хэммонд П. Теория обратной связи и ее применение. М: Гос. изд. физ. мат. лит, 1961.
  10. Букингем М. Шумы в электронных приборах и системах. М.: Мир, 1986.
  11. Лэм Г. Аналоговые и цифровые фильтры. М.: Мир, 1982.
  12. Вайнштейн Л. А. и Зубков В. Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. М.: Сов. радио, 1960.
  13. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М: Сов. радио, 1966.
  14. Бонч-Бруевич А. М. Радиоэлектроника в экспериментальной физике. М.: Наука, 1966.
  15. Справочник по теоретическим основам радиотехники / Под ред. Б. Х. Кривицкого, В. Н. Дулина. М.: Энергия, 1977.
  16. Ионкин П. А., Мельников Н.А., Доревский А. И., Кухаркин Е. С. Теоретические основы электротехники.  
ч 1. Основы теории цепей. М.: Высш. шк., 1976.
  17. Хоровиц П., Хилл У. Искусство схемотехники.  
В 2-х томах. М.: Мир, 1983.

## **Оглавление**

1. Анализ сигналов .....	3
1.1 Импульсные сигналы .....	3
1.2. Периодические сигналы .....	5
1.3. Почти периодические сигналы .....	5
1.4. Случайные сигналы .....	6
1.5. Стационарные случайные процессы .....	7
1.6. Постоянная и переменная составляющие .....	7
1.7. Четная и нечетная составляющие .....	9
1.8. Действительная и мнимая составляющие .....	10
1.9. Сравнение сигналов .....	11
1.10. Корреляционная функция .....	14
1.11. Свертка .....	16
1.12. Тригонометрический ряд Фурье для периодических сигналов .....	18
1.13. Экспоненциальный ряд Фурье .....	21
1.14. Интеграл Фурье для импульсного сигнала .....	23
2. Передача сигналов через линейные системы .....	27
2.1. Линейная передающая система .....	27
2.2. Классический метод .....	29
2.3. Метод интеграла Фурье .....	30
2.4. Интеграл суперпозиции .....	31
2.5. Интеграл суперпозиции как корреляционная операция .....	34
3. Элементы аналоговой электроники .....	36
3.1. Основные схемы включения активных элементов (транзисторов) .....	37
Схема с общим эмиттером .....	37
Схема с общим коллектором – эмиттерный повторитель .....	39
Схема с общей базой .....	40
Дифференциальный усилительный каскад .....	40
3.2. Основные типы ООС .....	42
ООС, последовательная по напряжению (неинвертирующий усилитель) .....	42

<i>ООС, параллельная по напряжению (инвертирующий усилитель)</i> .....	43
Влияние ООС на входное и выходное сопротивления усилителя .....	43
Влияние ООС на амплитудно – частотную характеристику усилителя .....	44
Проблема устойчивости усилителя с ООС .....	47
Классификация усилителей по входному/выходному сопротивлениям .....	48
3.3. Транзисторные «двойки» .....	49
3.4. Зарядочувствительные предусилители .....	52
4. Шумы в усилительных каскадах .....	57
4.1. Тепловой шум .....	57
4.2. Дробовой шум .....	58
4.3. Шум $1/f$ .....	59
4.4. Приведение шумов ко входу. Эквивалентное шумовое сопротивление .....	59
4.5. Эквивалентный шумовой заряд .....	61
5. Фильтрация шумов .....	65
5.1. Оптимальная фильтрация .....	65
5.2. Сравнительный анализ фильтров методом шумовых индексов .....	68
RC–CR фильтр .....	70
Время – инвариантный трапециoidalный фильтр .....	71
Время – вариантий треугольный фильтр .....	73
Фильтр «RC–CR + управляемый интегратор» / .....	74
Оптимальный фильтр .....	76
<b>Приложение 1. Корреляционные функции некоторых импульсных сигналов .....</b>	<b>78</b>
П1.1. Гауссов импульс .....	78
П1.2. Импульс и линейный импульс .....	79
П1.3. Импульс и периодическая последовательность линейных импульсов .....	79
<b>Приложение 2. Некоторые основные свойства рядов Фурье ...</b>	<b>81</b>

# www.phys.nsu.ru

<b>Приложение 3. Спектры некоторых сигналов .....</b>	83
Сопоставление спектров .....	83
Гауссов импульс .....	84
Прямоугольный импульс .....	87
Пилообразный импульс .....	89
Экспоненциальный импульс .....	91
Периодическая последовательность экспоненциальных импульсов .....	92
Некоторые случайные сигналы конечной мощности и их спектры .....	94
Взаимная корреляция спектров .....	98
Теорема о дискретных выборках .....	99
<b>Литература .....</b>	101

# www.phys.nsu.ru

# www.phys.nsu.ru<sup>104</sup>