Оценивание параметров распределений

Лекция №5

Статистические методы в ядерном эксперименте, ИЯФ, 2024 г.

1. Выборочные характеристики и их свойства
2. Неравенство Чебышева
3. Закон больших чисел (ЗБЧ)
4. Центральная предельная теорема (ЦПТ)
5. Точечное оценивание параметров: метод моментов

Выборочные характеристики и их свойства

Если $\{X_k\}_n$ – выборка случайной величины объёмом n, причём $\forall k,\ E(X_k) = \mu,\ D(X_k) = \sigma^2$, то выборочное среднее $\langle x \rangle$ и выборочная дисперсия s^2:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \langle x \rangle)^2$$

$E(\langle x \rangle) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \mu$, т.е. $\langle x \rangle$ является несмещённой оценкой μ.

$D(\langle x \rangle) = D(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} D(X_k) = \frac{\sigma^2}{n},\ \sigma(\langle x \rangle) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$E(s^2) = \sigma^2$, т.е. s^2 – несмещённая оценка истинной дисперсии σ^2.

$D(s^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$ (в случае $N(\mu; \sigma)$)

Нас будет интересовать как себя ведёт выборочное среднее $\langle x \rangle_n$ при увеличении статистики ($n \to \infty$).

Неравенство Чебышева (I)

Обобщённое неравенство Чебышева

Пусть функция $g(x)$ положительна и не убывает. Тогда, если для некоторой с.в. ξ выполняется $E(g(\xi)) < \infty$, то для любого x имеем:

$$P(g(\xi) \geq g(x)) \leq \frac{E(g(\xi))}{g(x)}$$

И действительно:

$$E(g(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t) f_\xi(t) dt \geq \int\limits_{x}^{+\infty} g(t) f_\xi(t) dt \geq g(x) \int\limits_{x}^{+\infty} f_\xi(t) dt =$$

$$= g(x) P(\xi \geq x) = g(x) P(g(\xi) \geq g(x))$$

Рассмотрим частный случай, когда $g(x) = x^2$. Применим обобщённое неравенство к с.в. $\xi - E(\xi) = \xi - \mu$:

$P((\xi - \mu)^2 \geq x^2) = P(|\xi - \mu| \geq x) \leq \frac{D(\xi)}{x^2} = \frac{\sigma^2}{x^2}, \; x > 0$

Полагая $x = k\sigma$ получим <u>неравенство Чебышева</u>:

$$P(|\xi - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Неравенство Чебышева (II)

Ввиду своей общности, неравенство Чебышева дает очень слабое ограничение на вероятность больших отклонений с.в. от своего математического ожидания. Сравним эти вероятности с соответствующими вероятностями для нормального распределения:

k	$P(\lvert\xi-\mu\rvert \geq k\sigma)$ для нормального распределения	$P(\lvert\xi-\mu\rvert \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$
1	0.32	≤ 1.0
2	0.045	≤ 0.25
3	0.003	≤ 0.111

<u>Замечание:</u> В пределах $\pm 3\sigma$ находится не менее 89% всех значений <u>любой</u> (имеющей математическое ожидание и дисперсию) случайной величины.

Закон больших чисел (ЗБЧ)

Мы уже знаем, что выборочное среднее $\langle x \rangle$ является хорошей оценкой математического ожидания μ случайной величины. Теперь докажем более сильное утверждение о том, что с ростом объёма выборки $\langle x \rangle$ с большой вероятностью стремится к μ как к своему пределу. Для этого применим неравенство Чебышева к величине $\langle x \rangle$ со среднеквадратичным отклонением $\sigma/\sqrt{n}$ (n – объём выборки):

$$P(|\langle x \rangle - \mu| \geq \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}) \leq \frac{1}{k^2}$$

Введём обозначение $\varepsilon = k\sigma/\sqrt{n}$, $k = \varepsilon\sqrt{n}/\sigma$, тогда

$$P(|\langle x \rangle - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \Rightarrow P(|\langle x \rangle - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Таким образом, ЗБЧ гласит, что сколь угодно близкое к μ значение $\langle x \rangle$ (выбирая сколь угодно малое ε) достигается с вероятностью сколь угодно близкой к 1 (выбором достаточно большого n), т.е. $P(\langle x \rangle \to \mu) \underset{n\to\infty}{\to} 1$: говорят что $\langle x \rangle \underset{n\to\infty}{\to} \mu$ <u>по вероятности</u> и обозначают как $\langle x \rangle_n \xrightarrow{p} \mu$.

Центральная предельная теорема (ЦПТ)

ЦПТ приводит к ещё более сильному утверждению относительно распределения $\langle x \rangle$ в целом, а не только его параметров $E(\langle x \rangle)$ и $D(\langle x \rangle)$.

Пусть случайная величина x имеет конечные математическое ожидание μ и дисперсию σ^2, тогда при стремлении объёма выборки n к бесконечности распределение выборочного среднего $\langle x \rangle_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ будет стремиться к нормальному распределению со средним μ и дисперсией σ^2/n. Т.е. ф.п.в.$(\langle x \rangle_n) \underset{n\to\infty}{\to} N(\mu; \sigma/\sqrt{n})$.

Доказательство: Производящая функция центральных моментов $M_x(t) = E(e^{(x-\mu)t}) = 1 + \sigma^2 \frac{t^2}{2} + \mu_3 \frac{t^3}{3!} + \ldots$. Пусть $\omega = \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, тогда $M_\omega(t) = E(e^{\omega t}) = E(e^{\frac{(x-\mu)t}{\sigma\sqrt{n}}}) = M_x\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$. В результате

$M_\omega(t) = 1 + \frac{t^2}{2n} + \mu_3 \frac{t^3}{6\sigma^3 n\sqrt{n}} + \ldots$

Введём $z = \frac{(\langle x \rangle_n - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)\sqrt{n}}{\sigma} = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i$, таким образом

$M_z(t) = [M_\omega(t)]^n = (1 + \frac{t^2}{2n} + \mu_3 \frac{t^3}{6\sigma^3 n\sqrt{n}} + \ldots)^n \underset{n\to\infty}{\to} e^{t^2/2}$, а это значит, что ф.п.в.$(z) \underset{n\to\infty}{\to} N(0,1)$ или ф.п.в.$(\langle x \rangle_n) \underset{n\to\infty}{\to} N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$.

Точечное оценивание параметров

Чтобы по результатам наблюдений получить оценку искомого параметра, необходимо выбрать функцию от результатов наблюдений; критерии лежащие в основе выбора этой функции и составляют метод оценки. Наиболее распространены следующие методы построения оценок:

- Метод моментов
- Метод максимального правдоподобия
- Метод наименьших квадратов

Если $\{X_k\}_n$ – выборка объёмом n случайной величины x с ф.п.в. $f(x|\theta)$ ($\theta \in \Theta$). Выберем некоторую функцию $g(y)$, такую, что существует момент:

$$E(g(x)) = \int g(x)f(x|\theta)dx = h(\theta)$$

и функция $h(\theta)$ обратима для всех $\theta \in \Theta$, тогда:

$$\theta = h^{-1}(E(g(x)))$$

Подставляя вместо неизвестного истинного значения математического ожидания $E(g(x))$ его выборочное значение $\langle g(x)\rangle = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_k)$ получим оценку θ^* параметра θ методом моментов (ММ):

$$\theta^* = h^{-1}(\langle g(x)\rangle)$$

Метод моментов (II)

Пример: Пусть $\{X_k\}_n$ – выборка объёмом n случайной величины x с ф.п.в. $f(x|\theta) = 1/\theta$ на отрезке $x \in [0, \theta]$ $(\theta > 0)$. Найти оценку параметра θ методом моментов по k-ому моменту $(g(y) = y^k)$:

$$E(g(x)) = \int\limits_0^\theta y^k \frac{dy}{\theta} = \frac{\theta^k}{k+1}.$$

Тогда:

$$\theta = \sqrt[k]{(k+1)E(x^k)},$$

и оценка параметра θ:

$$\theta^* = \sqrt[k]{(k+1)\langle x^k \rangle}, \quad \langle x^k \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k,$$

Замечание: Выбор функции $g(y)$ неоднозначен.

Если ф.п.в. с.в. x, $f(x|\vec{\theta})$, зависит от нескольких параметров $\vec{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_k)$, то $\vec{\theta}$ выражают через набор моментов $\vec{\theta} = \vec{\theta}(a_1, ..., a_k)$, где $a_i = \overline{x^i}$, а далее для оценки параметров используют выборочные моменты $\vec{a}^*$:

$$\vec{\theta}^* = \vec{\theta}(a_1^*, ..., a_k^*)$$

<u>Пример:</u> ф.п.в. с.в. x: гамма-распределение $\Gamma(t|\alpha,\lambda) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} t^{\lambda-1} e^{-\alpha t}$. Найти ММ-оценки α^* и λ^*.

$$a_1 = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int\limits_0^\infty t \cdot t^{\lambda-1} e^{-\alpha t} dt = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\alpha\Gamma(\lambda)} = \frac{\lambda}{\alpha},$$

$$a_2 = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int\limits_0^\infty t^2 \cdot t^{\lambda-1} e^{-\alpha t} dt = \frac{\Gamma(\lambda+2)}{\alpha^2\Gamma(\lambda)} = \frac{\lambda(\lambda+1)}{\alpha^2},$$

$$\lambda = \frac{a_1^2}{a_2 - a_1^2}, \quad \alpha = \frac{a_1}{a_2 - a_1^2} \Rightarrow \lambda^* = \frac{\langle x \rangle^2}{s^2}, \quad \alpha = \frac{\langle x \rangle}{s^2}$$

Метод моментов (IV)

Свойства оценок методом моментов:

- Оценка параметра θ, полученная по методу моментов, состоятельна в случае если функция h^{-1} непрерывна.

Состоятельность

Статистика $\theta^* = \theta^*(X_1, \dots, X_n)$ называется состоятельной оценкой параметра θ, если $\forall\theta \in \Theta$ имеет место сходимость по вероятности $\theta^* \underset{n\to\infty}{\to} \theta$.

- Оценка методом моментов является, как правило, только асимптотически несмещённой.
- При больших объёмах выборки n, оценка θ^* параметра θ, полученная методом моментов, имеет практически нормальное распределение. Асимптотически нормальные оценки сближаются с оцениваемым параметром со скоростью $1/\sqrt{n}$.