Интервальное оценивание параметров (продолжение)

Лекция №8

Статистические методы в ядерном эксперименте, ИЯФ, 2024 г.

1. Построение доверительных интервалов при оценке μ и σ^2
2. Построение доверительных интервалов ММП
3. Примеры

Построение доверительных интервалов для μ и σ^2 (I)

1) Стандартное нормальное распределение ($x \in (-\infty, +\infty)$):

$$N(x|\mu = 0, \sigma = 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad E(x) = 0, \; D(x) = 1$$

2) Распределение $\chi^2_n(y)$ с n степенями свободы ($y \in (0, +\infty)$) :

$$\chi^2_n(y) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y/2} H(y), \quad H(y) = y > 0 \,?\, 1 : 0;$$

$$E(y) = n, \; D(y) = 2n$$

3) Распределение Стьюдента $T_n(z)$ с n степенями свободы ($z \in (-\infty, +\infty)$):

$$T_n(z) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{(1 + \frac{z^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}}, \quad E(z) = 0, \; D(z) = \frac{n}{n-2} \; (n > 2)$$

Построение доверительных интервалов для μ и σ^2 (II)

Пусть $\{X_k\}_n$ – выборка объёма n из $N(\mu, \sigma^2)$, и

$\langle x \rangle = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - \langle x \rangle)^2$, $s'^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - \mu)^2$ тогда:

- $\frac{\langle x \rangle - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \in N(0, 1)$ (для оценки доверительного интервала для μ при известном σ^2)
- $\frac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = \frac{ns'^2}{\sigma^2} \in \chi^2_n$ (для оценки доверительного интервала для σ^2 при известном μ)
- $\frac{\langle x \rangle - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \in T_{n-1}$ (для оценки доверительного интервала для μ при неизвестном σ^2, вместо σ^2 используем выборочную дисперсию s^2)
- $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \langle x \rangle}{\sigma}\right)^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \in \chi^2_{n-1}$ (для оценки доверительного интервала для σ^2 при неизвестном μ, вместо μ используем выборочное среднее $\langle x \rangle$)

Построение доверительных интервалов для μ и σ^2 (III)

- Доверительный интервал для параметра μ если σ^2 известна:

$$\langle x \rangle - \frac{q_{1-\varepsilon/2}\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \langle x \rangle + \frac{q_{1-\varepsilon/2}\sigma}{\sqrt{n}}$$

  где $q_{1-\varepsilon/2}$ – квантиль уровня $1-\varepsilon/2$ для стандартного нормального распределения, если:
  - $q_{1-\varepsilon/2} = 1$, то уровень достоверности $1-\varepsilon = 0.6826$;
  - $q_{1-\varepsilon/2} = 1.65$, то уровень достоверности $1-\varepsilon = 0.901$;
  - $q_{1-\varepsilon/2} = 1.96$, то уровень достоверности $1-\varepsilon = 0.95$.
- Доверительный интервал для параметра σ^2 если μ известно:

$$1-\varepsilon = P\left(q_{\varepsilon/2}(n) < \frac{ns'^2}{\sigma^2} < q_{1-\varepsilon/2}(n)\right) = P\left(\frac{ns'^2}{q_{1-\varepsilon/2}(n)} < \sigma^2 < \frac{ns'^2}{q_{\varepsilon/2}(n)}\right),$$

  где $q_{\varepsilon/2}(n)$ и $q_{1-\varepsilon/2}(n)$ – квантили уровней $\varepsilon/2$ и $1-\varepsilon/2$ для распределения χ^2_n.

Построение доверительных интервалов для μ и σ^2 (IV)

- Доверительный интервал для параметра μ если σ^2 неизвестна:

$$1-\varepsilon = P\left(-q_{1-\varepsilon/2}(n) < \frac{\mu - \langle x \rangle}{\sqrt{s^2/n}} < q_{1-\varepsilon/2}(n)\right) = P\left(\langle x \rangle - q_{1-\varepsilon/2}(n)\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \langle x \rangle + q_{1-\varepsilon/2}(n)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

где $q_{1-\varepsilon/2}(n)$ – квантиль уровня $1-\varepsilon/2$ распределения T_{n-1}.

- Доверительный интервал для параметра σ^2 если μ неизвестно:

$$1-\varepsilon = P\left(q_{\varepsilon/2}(n) < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < q_{1-\varepsilon/2}(n)\right) = P\left(\frac{(n-1)s^2}{q_{1-\varepsilon/2}(n)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{q_{\varepsilon/2}(n)}\right),$$

где $q_{\varepsilon/2}(n)$ и $q_{1-\varepsilon/2}(n)$ – квантили уровней $\varepsilon/2$ и $1-\varepsilon/2$ для распределения χ^2_{n-1}.

Построение довер. интервалов для μ и σ^2 (V)

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$:

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,45	0,1736	0,90	0,3159	1,35	0,4115
0,01	0,0040	0,46	0,1772	0,91	0,3186	1,36	0,4131
0,02	0,0080	0,47	0,1808	0,92	0,3212	1,37	0,4147
0,03	0,0120	0,48	0,1844	0,93	0,3238	1,38	0,4162
0,04	0,0160	0,49	0,1879	0,94	0,3264	1,39	0,4177
0,05	0,0199	0,50	0,1915	0,95	0,3289	1,40	0,4192
0,06	0,0239	0,51	0,1950	0,96	0,3315	1,41	0,4207
0,07	0,0279	0,52	0,1985	0,97	0,3340	1,42	0,4222
0,08	0,0319	0,53	0,2019	0,98	0,3365	1,43	0,4236
0,09	0,0359	0,54	0,2054	0,99	0,3389	1,44	0,4251
0,10	0,0398	0,55	0,2088	1,00	0,3413	1,45	0,4265
0,11	0,0438	0,56	0,2123	1,01	0,3438	1,46	0,4279
0,12	0,0478	0,57	0,2157	1,02	0,3461	1,47	0,4292
0,13	0,0517	0,58	0,2190	1,03	0,3485	1,48	0,4306
0,14	0,0557	0,59	0,2224	1,04	0,3508	1,49	0,4319
0,15	0,0596	0,60	0,2257	1,05	0,3531	1,50	0,4332
0,16	0,0636	0,61	0,2291	1,06	0,3554	1,51	0,4345
0,17	0,0675	0,62	0,2324	1,07	0,3577	1,52	0,4357
0,18	0,0714	0,63	0,2357	1,08	0,3599	1,53	0,4370
0,19	0,0753	0,64	0,2389	1,09	0,3621	1,54	0,4382
0,20	0,0793	0,65	0,2422	1,10	0,3643	1,55	0,4394
0,21	0,0832	0,66	0,2454	1,11	0,3665	1,56	0,4406
0,22	0,0871	0,67	0,2486	1,12	0,3686	1,57	0,4418
0,23	0,0910	0,68	0,2517	1,13	0,3708	1,58	0,4429
0,24	0,0948	0,69	0,2549	1,14	0,3729	1,59	0,4441
0,25	0,0987	0,70	0,2580	1,15	0,3749	1,60	0,4452
0,26	0,1026	0,71	0,2611	1,16	0,3770	1,61	0,4463
0,27	0,1064	0,72	0,2642	1,17	0,3790	1,62	0,4474
0,28	0,1103	0,73	0,2673	1,18	0,3810	1,63	0,4484
0,29	0,1141	0,74	0,2703	1,19	0,3830	1,64	0,4495
0,30	0,1179	0,75	0,2734	1,20	0,3849	1,65	0,4505
0,31	0,1217	0,76	0,2764	1,21	0,3869	1,66	0,4515
0,32	0,1255	0,77	0,2794	1,22	0,3883	1,67	0,4525
0,33	0,1293	0,78	0,2823	1,23	0,3907	1,68	0,4535
0,34	0,1331	0,79	0,2852	1,24	0,3925	1,69	0,4545
0,35	0,1368	0,80	0,2881	1,25	0,3944	1,70	0,4554
0,36	0,1406	0,81	0,2910	1,26	0,3962	1,71	0,4564
0,37	0,1443	0,82	0,2939	1,27	0,3980	1,72	0,4573
0,38	0,1480	0,83	0,2967	1,28	0,3997	1,73	0,4582
0,39	0,1517	0,84	0,2995	1,29	0,4015	1,74	0,4591
0,40	0,1554	0,85	0,3023	1,30	0,4032	1,75	0,4599
0,41	0,1591	0,86	0,3051	1,31	0,4049	1,76	0,4608
0,42	0,1628	0,87	0,3078	1,32	0,4066	1,77	0,4616
0,43	0,1664	0,88	0,3106	1,33	0,4082	1,78	0,4625
0,44	0,1700	0,89	0,3133	1,34	0,4099	1,79	0,4633

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
1,80	0,4641	2,00	0,4772	2,40	0,4918	2,80	0,4974
1,81	0,4649	2,02	0,4783	2,42	0,4922	2,82	0,4976
1,82	0,4656	2,04	0,4793	2,44	0,4927	2,84	0,4977
1,83	0,4664	2,06	0,4803	2,46	0,4931	2,86	0,4979
1,84	0,4671	2,08	0,4812	2,48	0,4934	2,88	0,4980
1,85	0,1678	2,10	0,4821	2,50	0,4938	2,90	0,4981
1,86	0,4686	2,12	0,4830	2,52	0,4941	2,92	0,4982
1,87	0,4693	2,14	0,4838	2,54	0,4945	2,94	0,4984
1,88	0,4699	2,16	0,4846	2,56	0,4948	2,96	0,4985
1,89	0,4706	2,18	0,4854	2,58	0,4951	2,98	0,4986
1,90	0,4713	2,20	0,4861	2,60	0,4953	3,00	0,49865
1,91	0,4719	2,22	0,4868	2,62	0,4956	3,20	0,49931
1,92	0,4726	2,24	0,4875	2,64	0,4959	3,40	0,49966
1,93	0,4732	2,26	0,4881	2,66	0,4961	3,00	0,499841
1,94	0,4738	2,28	0,4887	2,68	0,4963	3,80	0,499928
1,95	0,4744	2,30	0,4893	2,70	0,4965	4,00	0,499968
1,96	0,4750	2,32	0,4898	2,72	0,4967	4,50	0,499997
1,97	0,4756	2,34	0,4904	2,74	0,4969	5,00	0,4999997
1,98	0,4761	2,36	0,4909	2,76	0,4971		
1,99	0,4767	2,38	0,4913	2,78	0,4973		

В пакете ROOT в классе TMath имеется метод NormQuantile.

x=TMath::NormQuantile(p) возвращает такой x, что: $p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Построение довер. интервалов для μ и σ^2 (VI)

Таблица значений ξ таких что $p = \int\limits_{\xi}^{+\infty} \chi^2_\nu(x)dx$:

Таблица IV

Распределение χ^2

Приведены значения вероятности p того, что $\chi^2 \geqslant \chi^2_p$ при числе степеней свободы ν [13]

ν	$p=0,99$	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70
1	0,000157	0,000628	0,00393	0,0158	0,0642	0,148
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352
20	8,260	9,237	10,851	12,444	14,578	16,266
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,710
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508

Продолжение табл. IV

ν	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

В пакете ROOT в классе TMath имеется методы ChisquareQuantile и Prob.
ξ=TMath::ChisquareQuantile(p,n) возвращает значение ξ такое, что $p = \int_0^{\xi} \chi^2_n(x)dx$, т.е. вероятность того, что случайная величина $\chi^2_n < \xi$ равна p ($P(\chi^2_n < \xi) = p$).
p=TMath::Prob($\bar{\xi}$,n) возвращает вероятность $p = \int_{\bar{\xi}}^{+\infty} \chi^2_n(x)dx$, т.е. вероятность того, что случайная величина $\chi^2_n > \bar{\xi}$ ($p = P(\chi^2_n > \bar{\xi})$).

Построение довер. интервалов для μ и σ^2 (VII)

Таблица значений τ таких, что $p = 1 - \int\limits_{-\tau}^{\tau} T_n(x)dx$:

Таблица V

t-распределение Стьюдента

Приведены значения вероятности p того, что t отличается от его нулевого среднего в любую сторону более чем на t_p при числе степеней свободы ν [13]

ν	p=0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0 690	0,865
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856
27	0,127	0,256	0 389	0,531	0,684	0,855
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854
30	0,127	0,256	0,389	0 530	0,683	0,854
∞	0,12566	0,25335	0,38532	0,52440	0,67449	0,84162

Продолжение табл. V

ν	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
1	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,707
25	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	1,03643	1,28155	1,64485	1,95996	2,32634	2,57582

В пакете ROOT в классе TMath имеется метод StudentQuantile.

$\bar{\tau}$=TMath::StudentQuantile(p,n) возвращает значение $\bar{\tau}$ такое, что $p = \int\limits_{-\infty}^{\bar{\tau}} T_n(x)dx$,

т.е. вероятность того, что случайная величина $T_n < \bar{\tau}$ равна p ($P(T_n < \bar{\tau}) = p$).

Построение довер. интервалов для μ и σ^2 (VIII)

Пример: Автомат фасует чай в пачки. Сделана случайная выборка $n = 20$ пачек. Выборочная средняя масса пачки чая $\langle x \rangle = 79$ г. Определить доверительный интервал для средней массы пачки μ с уровнем достоверности $p = 99\%$ если:

- известно стандартное отклонение массы пачки $\sigma = 3$ г.,
- стандартное отклонение массы пачки неизвестно и выборочное стандартное отклонение $s = \sqrt{s^2} = 3$ г.

Метод максимального правдоподобия (I)

Метод максимального правдоподобия (ММП) позволяет не только получить точечную оценку параметра, но также дает возможность построить доверительный интервал.

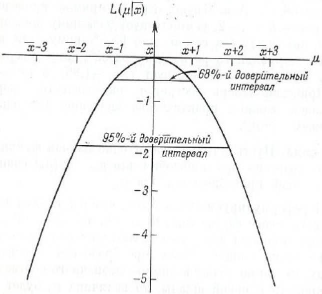
Пример: Пусть имеется выборка объёма n из нормального распределения $N(\mu, \sigma^2)$ с известной дисперсией σ^2 и неизвестным средним μ. Тогда функция правдоподобия (с точностью до постоянных множителей) имеет вид:

$$F(\vec{X}, \mu) \sim e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}}, \quad \mathcal{L}(\vec{X}, \mu) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$$

К этому выражению можно добавить $\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i^2 - \langle x\rangle^2)$, не содержащее μ, тогда получим:

$$\mathcal{L}(\mu, \vec{X}) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - \langle x\rangle}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \Rightarrow \mathcal{F}(\mu, \vec{X}) \sim e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-\langle x\rangle}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2},$$

Функция правдоподобия для начальной выборки также рассматривается как функция правдоподобия единичной выборки для параметра μ, т.е. как функция плотности вероятности для параметра μ.



Ф и г. 22.

Подобный график лежит в основе анализа большого класса функций правдоподобия, которые зависят от одного параметра и обладают следующими свойствами:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & L(\mu)\text{ — непрерывны,} \\ 2) & L(\mu)\text{ — имеют единственный локальный} \\ & \text{максимум в интересующей нас} \\ & \text{области.} \end{array}\right\} \quad (148)$$

Приведённая выше логарифмическая функция правдоподобия имеет максимум при $\mu = \bar{x} = \langle x \rangle$. Отрезок прямой, соединяющий ветви параболы на уровне $L = -1/2$, характеризует доверительный интервал для μ, $(\bar{x} - \sigma) \le \mu \le (\bar{x} + \sigma)$, который записывают в виде $\mu = \bar{x} \pm \sigma$.

Метод максимального правдоподобия (III)

Согласно свойствам нормального распределения, интервалу $(\bar{x} - \sigma) \leq \mu \leq (\bar{x} + \sigma)$ соответствует уровень доверия (доверительная вероятность) равный 68.3%. Аналогично, отрезок прямой, проведённый на уровне $L = -2$, соответствует 95.5%-ному доверительному интервалу.

Теорема: Пусть $\mathcal{L}(\theta|\vec{X})$ – непрерывная функция θ с единственным максимумом в области допустимых значений θ. Доверительный интервал для θ можно найти с помощью той же процедуры, что и доверительный интервал для среднего значения μ в случае единичной выборки из распределения $N(\mu, \sigma^2)$.

Метод максимального правдоподобия (IV)

Пример 1: Пусть $\{x_1, ..., x_6\}$ – выборка объёма $n = 6$ из нормального распределения с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$:

$$\{1.468,\ -2.097,\ 0.146,\ -0.295,\ -2.120,\ 0.017\},$$

найти оценку σ^2 и её доверительные интервалы (CL=68%,95%) методом максимального правдоподобия.

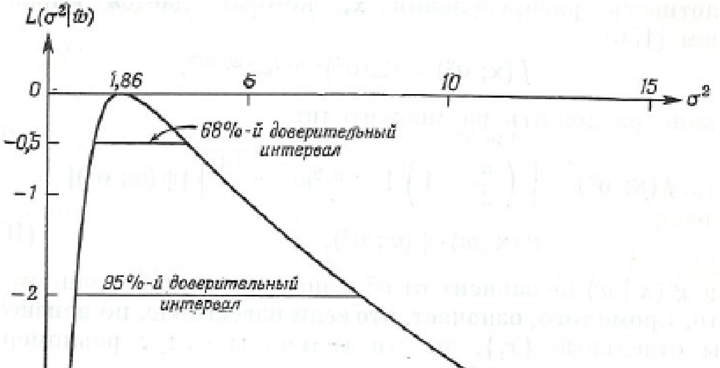
$$F(\vec{X}|\sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{6} x_i^2},\ \mathcal{L}(\sigma^2|w) = \ln F(\vec{X}|\sigma^2) + \mathrm{const},$$

$$\mathcal{L}(\sigma^2|w) = -\frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{w}{2\sigma^2} + \frac{n}{2}\ln\frac{we}{n}, \quad w = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 11.155,$$

$$\mathcal{L}(\sigma^2|w) = 4.860 - 3\ln\sigma^2 - \frac{5.578}{\sigma^2},$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\sigma^2} = 0, \quad \sigma^{*2} = \frac{w}{n} = \frac{11.155}{6} = 1.86.$$

Метод максимального правдоподобия (V)



$L(\sigma^2 \mid w)$ с прямой линией $L = -{}^1/_2$. Это дает

$$1{,}10 \leqslant \sigma^2 \leqslant 3{,}49 \ (\text{ср. } \hat{\sigma}^2 = 1{,}86).$$

Мы видим, что подобный «узкий» доверительный интервал не содержит известного истинного значения $\sigma^2 = 1$. Можно ожидать, что при использовании узкого доверительного интервала подобное нежелательное событие будет происходить в 32 случаях из 100.

Пересечение $\mathcal{L}(\sigma^2|w)$ с прямой линией $L = -2$ даёт 95.5%-ный доверительный интервал для σ^2: $0.71 \leq \sigma^2 \leq 7.8$

Пример 2 (случайная выборка большого объёма): Пусть $\{x_1, ..., x_{40}\}$ – выборка объёма $n = 40$ из нормального распределения с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$, её достаточная статистика $w = 37.52$, найти оценку σ^2 и её CL=68% доверительный интервал методом максимального правдоподобия.

$$\mathcal{L}(\sigma^2|w) = 18.72 - 20\ln\sigma^2 - \frac{18.76}{\sigma^2} \Rightarrow \sigma^{*2} = 0.938,$$

$$0.765 \le \sigma^2 \le 1.18, \quad \sigma^2 = 0.938 \pm \begin{matrix} 0.242 \\ 0.173 \end{matrix}.$$